∽ Brevet de technicien supérieur Métropole ∾ Groupement A2 mai 2006 [1]

Exercice 1 **11 points**

Partie A

Une entreprise produit, en grande quantité, des appareils. Chaque appareil fabriqué peut présenter deux défauts que l'on appellera défaut a et défaut b.
On prélève un appareil au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'évènement : « l'appareil présente le défaut a » et B l'évènement : « l'appareil présente le défaut b ».
Les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,02$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « l'appareil présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 : « l'appareil est défectueux, c'est-à-dire qu'il présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « l'appareil ne présente aucun défaut ».
4. Sachant que l'appareil est défectueux, quelle est la probabilité qu'il présente les deux défauts ? *Le résultat sera arrondi au millième.*

Dans les parties B et C, les résultats seront à arrondir au centième.

Partie B

Les appareils sont conditionnés par lots de 100 pour l'expédition aux distributeurs de pièces détachées. On prélève au hasard un échantillon de 100 appareils dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 appareils.
Pour cette partie, on considère que, à chaque prélèvement, la probabilité que l'appareil soit défectueux est 0,05.
On considère la variable aléatoire X_1 qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire X_1 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_1.
2. On suppose que l'on peut approcher la loi de X_1 par une loi de Poisson de paramètre λ.
   a. On choisit $\lambda = 5$; justifier ce choix.
   b. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux appareils défectueux dans un lot.

Partie C

Les appareils sont aussi conditionnés par lots de 800 pour l'expédition aux usines de montage. On prélève au hasard un lot de 800 appareils. On considère la variable aléatoire X_2 qui, à tout prélèvement de 800 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X_2 par la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type 6,2.

1. Électrotechnique, Génie optique, Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot.

2. Déterminer le réel x tel que $P(X_2 > x) = 0,01$.
En déduire, sans justification, le plus petit entier k tel que la probabilité que le lot comporte plus de k appareils défectueux soit inférieure à $0,01$.

Exercice 2 — 9 **points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soient α et β deux nombres réels.
Soit f une fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par $f(t) = \alpha t + \beta$.
On appelle a_0, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à la fonction f.

1. Montrer que $a_0 = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$.

2. Montrer que $b_n = -\dfrac{\alpha}{n\pi}$ pour tout nombre entier naturel n non nul.

On admet que $a_n = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On se propose de déterminer les nombres réels α et β pour que le développement S en série de Fourier de la fonction f soit défini pour tout nombre réel t par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(2n\pi t)$.

a. Déterminer les nombres réels α et β tels que $a_0 = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$.
En déduire l'expression de la fonction f.

b. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ dans un repère orthogonal.

Partie B

On veut résoudre l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = f(t)$$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction s en remplaçant $f(t)$ par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction f obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$$

Soit (E) l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$$

1. Vérifier que la fonction s_1 définie pour tout nombre réel t par :

$$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).