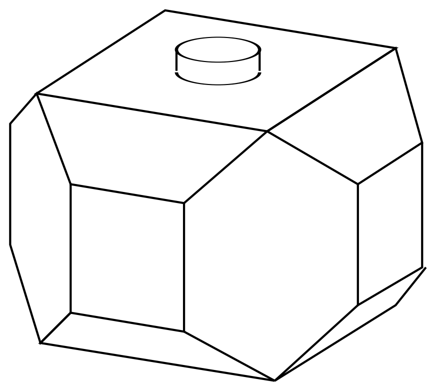
Brevet de technicien supérieur 12 mai 2016
Groupement E Design d'espace

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1 **10 points**

Un designer a conçu un petit flacon de cosmétiques, qu'il s'agit de détailler et d'observer.



1. On considère, sur la figure 1 ci-dessous, une pyramide régulière de sommet S et de base carrée MNPQ de côté a.

   La hauteur de cette pyramide est $\text{SH} = \dfrac{a}{2}$, H étant le centre du carré MNPQ et donc le projeté orthogonal de S sur MNPQ. On note I le milieu du segment [MN].

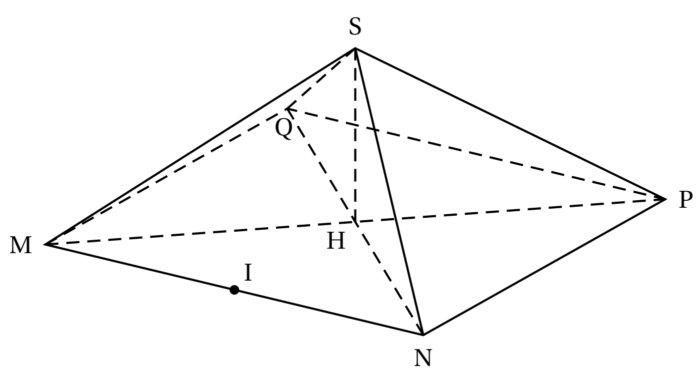


Figure 1

2. **a.** Justifier que la mesure de l'angle $\widehat{\text{SIH}}$ est 45°.

   b. Calculer, en fonction de a, la hauteur SI du triangle SMN.
   En déduire la longueur SN.

   c. Montrer que le volume V de la pyramide SMNPQ est $V = \dfrac{a^3}{6}$.

   (On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\dfrac{1}{3} \times B \times h$, où B est l'aire de la base et h la hauteur.)

3. On tronque cette pyramide à mi-hauteur. On obtient ainsi la pyramide tronquée représentée sur la figure 2.

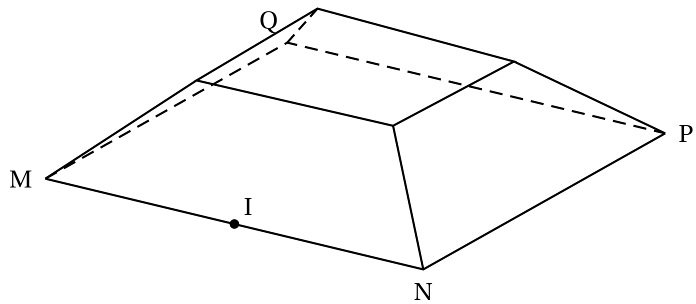


Figure 2

a. Quel est, en fonction de a, le volume de la pyramide que l'on enlève ?
En déduire le volume de la pyramide tronquée.

b. L'objectif de cette question est de représenter cette pyramide tronquée en perspective centrale.
On note `m, n, p, q, s` et `h` les images respectives des points M, N, P, Q, S et H dans cette représentation et `w` le point de fuite principal ; la droite `(sh)` étant parallèle au plan frontal.
Compléter soigneusement la représentation en perspective centrale de la pyramide tronquée sur la figure de l'annexe 1.
On laissera apparaître les traits de construction et on fera ressortir les arêtes visibles de la pyramide tronquée.

4. Pour obtenir le solide représenté ci-dessous en figure 3, on considère un cube d'arête a. Sur chacune des quatre faces latérales de ce cube, on ajoute une pyramide tronquée identique à celle de la figure 2.

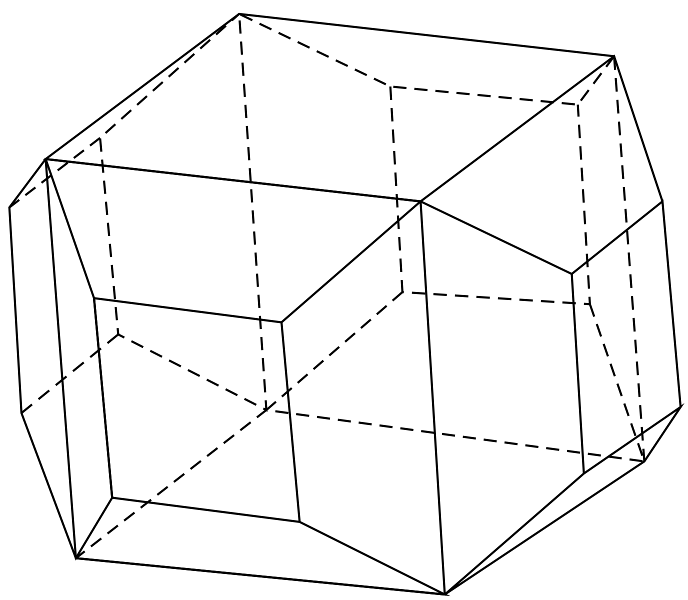


Figure 3

a. Montrer que le volume de ce flacon vaut $\dfrac{19}{12}a^3$.

b. On considère les milieux T, I et V des segments figurés en annexe 2. On admet que les points T, I, V appartiennent au plan médiateur du segment [MN].
Justifier que les points T, I et V sont alignés. On fera figurer sur l'annexe 2 les traits de construction illustrant le raisonnement.

c. En déduire le nombre, la nature et les dimensions des faces qui délimitent finalement le flacon (sans son bouchon).

Exercice 2 **10 points**

« Relax'vague », nouvelle chaîne française de spas, fait appel à un designer pour la conception d'un logo en forme de vague. Pour y parvenir, ce designer va utiliser deux courbes de Bézier, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ donné en annexe 3, on considère les points $\text{P}_0(5\ ;\ 3)$; $\text{P}_1(3\ ;\ 0)$ et $\text{P}_2(8\ ;\ 0)$.
La courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ définie par ces trois points de contrôle est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\overrightarrow{\text{O}M_1}(t) = (1-t)^2\overrightarrow{\text{OP}_0} + 2t(1-t)\overrightarrow{\text{OP}_1} + t^2\overrightarrow{\text{OP}_2}.$$

1. **a.** Placer les points $\text{P}_0(5\ ;\ 3)$; $\text{P}_1(3\ ;\ 0)$ et $\text{P}_2(8\ ;\ 0)$ sur la figure fournie en annexe 3.

b. En quels points de la courbe $\mathscr{C}_1$ peut-on connaître sans calcul les tangentes ?
Justifier la réponse et préciser ces tangentes.

2. Démontrer que les coordonnées x_1 et y_1 des points $M_1(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$ ont pour expression :

$$x_1 = f_1(t) = 7t^2 - 4t + 5 \quad \text{et} \quad y_1 = g_1(t) = 3t^2 - 6t + 3.$$

3. Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 définies pour t dans l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_1(t) = 7t^2 - 4t + 5 \quad \text{et} \quad g_1(t) = 3t^2 - 6t + 3.$$

Rassembler les résultats dans un tableau unique.

4. **a.** Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point S obtenu pour $t = \dfrac{2}{7}$.

b. Sur la figure donnée en annexe 3, faire apparaître les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_1$ aux points obtenus pour $t = 0$, $t = 3$ et $t = 1$, puis tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

5. La courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ est définie par les points de contrôle $\text{O}(0\,;\,0)$; P_1 ; $\text{P}_3(3\ ;\ 5)$ et P_0.
On montre que la courbe $\mathscr{C}_2$ est l'ensemble des points $M_2(t)$ du plan tels que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;1]$, les coordonnées x_2 et y_2 de $M_2(t)$ sont données par :

$$x_2(t) = f_2(t) \quad \text{et} \quad y_2(t) = g_2(t)$$

où f_2 et g_2 sont deux fonctions dont les variations sont données par le tableau suivant :

t	0		$\frac{5}{6}$		1
$f_2'(t)$	9	$+$	$4,4$	$+$	6
$f_2(t)$	0	$\nearrow$	$4,1$	$\nearrow$	5
$g_2'(t)$	0	$+$	0	$-$	-6
$g_2(t)$	0	$\nearrow$	$3,5$	$\searrow$	3

La courbe $\mathscr{C}_2$ est représentée en annexe 3. Il est inutile de déterminer les expressions de $f_2(t)$ et $g_2(t)$.

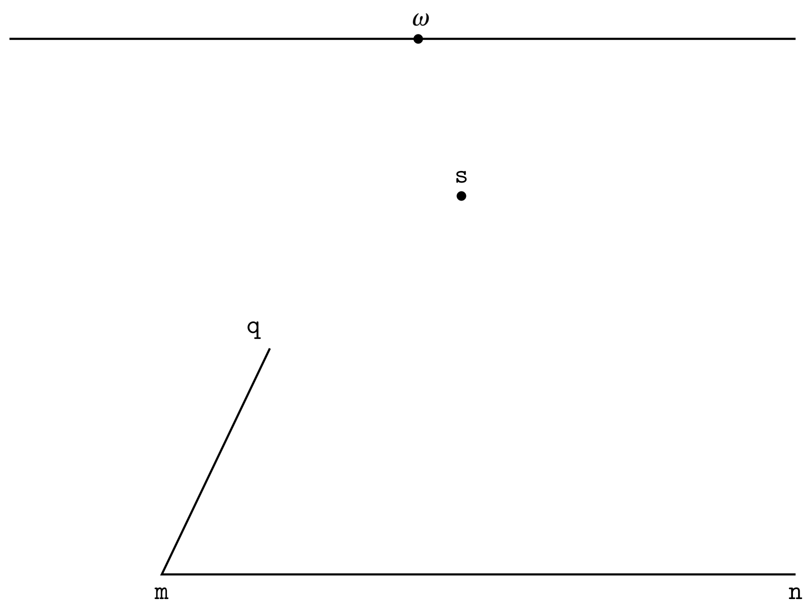
a. Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont-elles la même tangente au point P_0 ? Justifier.

b. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

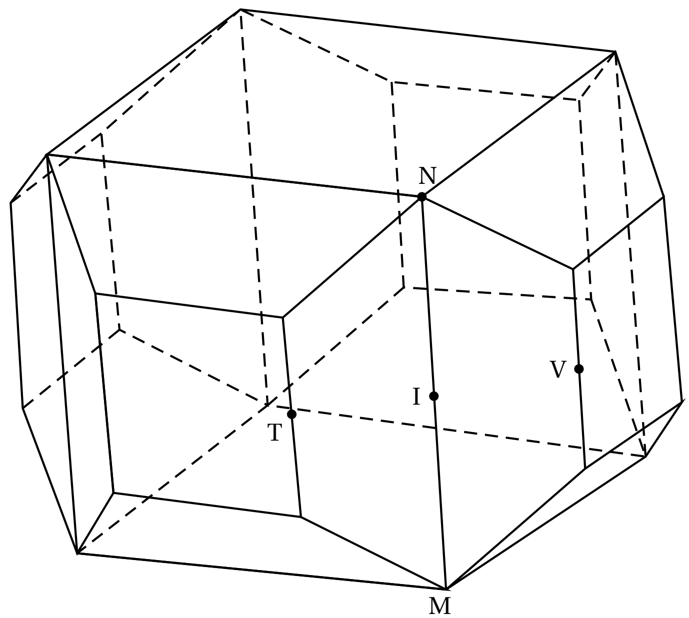
La courbe $\mathscr{C}_2$ admet au point obtenu pour $t = \dfrac{5}{6}$, une tangente de vecteur directeur :

$\overrightarrow{\imath}$	$\overrightarrow{\imath}$	$4,1\overrightarrow{\imath} + 3,5\overrightarrow{\jmath}$	$4,4\overrightarrow{\imath} + 4,1\overrightarrow{\jmath}$

ANNEXE 1 À RENDRE AVEC LA COPIE



ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE



ANNEXE 3 À RENDRE AVEC LA COPIE