Brevet de technicien supérieur
Corrigé du groupement D session 2012

EXERCICE 1 **11 points**

A. Résolution d'une équation différentielle

1. L'équation différentielle $y' + 0,25y = 0$ est de la forme $a(t)y' + b(t)y = 0$, avec $a(t) = 1$ et $b(t) = 0,5$.

   Les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_0(t) = k\mathrm{e}^{-0,25t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2. $h(t) = -4\mathrm{e}^{-t}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $h'(t) = 4\mathrm{e}^{-t}$.

   Donc $h'(t) + 0,25h(t) = 4\mathrm{e}^{-t} + 0,25 \times (-4)\mathrm{e}^{-t} = 4\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} = 3\mathrm{e}^{-t}$.

   Conclusion h est une solution particulière de (E).

3. On sait que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f(t) = f_0(t) + h(t) = k\mathrm{e}^{-0,25t} - 4\mathrm{e}^{-t}$, avec$k \in \mathbb{R}$.

4. $f(0) = 75 \iff k\mathrm{e}^{-0,25\times 0} - 4\mathrm{e}^{-0} = 75 \iff k - 4 = 75 \iff k = 79$.

   La solution est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 79\mathrm{e}^{-0,25t} - 4\mathrm{e}^{-t}$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

1. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,25t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

   Ceci montre que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à C au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** f somme de fonctions dérivables est dérivable sur $\mathbb{R}$ et c'est la fonction de la question A. 4. Elles est donc solution de l'équation (E), c'est-à-dire que :

   $f'(t)+0,25f(t) = 3\mathrm{e}^{-t} \iff f'(t) = 3\mathrm{e}^{-t}-0,25f(t) = 3\mathrm{e}^{-t}-0,25\left(79\mathrm{e}^{-0,25t} - 4\mathrm{e}^{-t}\right) = 4\mathrm{e}^{-t}-19,75\mathrm{e}^{-0,25t} = 4\mathrm{e}^{-0,25t}\times\mathrm{e}^{-0,75t}-19,75\mathrm{e}^{-0,25t} = \mathrm{e}^{-0,25t}\left(-19,75 + 4\mathrm{e}^{-0,75t}\right)$.

   b. Supposons que $-19,75 + 4\mathrm{e}^{-0,75t} < 0 \iff 4\mathrm{e}^{-0,75t} < 19,75 \iff \mathrm{e}^{-0,75t} < 4,9375 \iff -0,75t < \ln 4,9375 \iff 0,75t > -\ln 4,9375 \iff t > -\frac{4}{3}\ln 4,9375 \approx -2,1$.

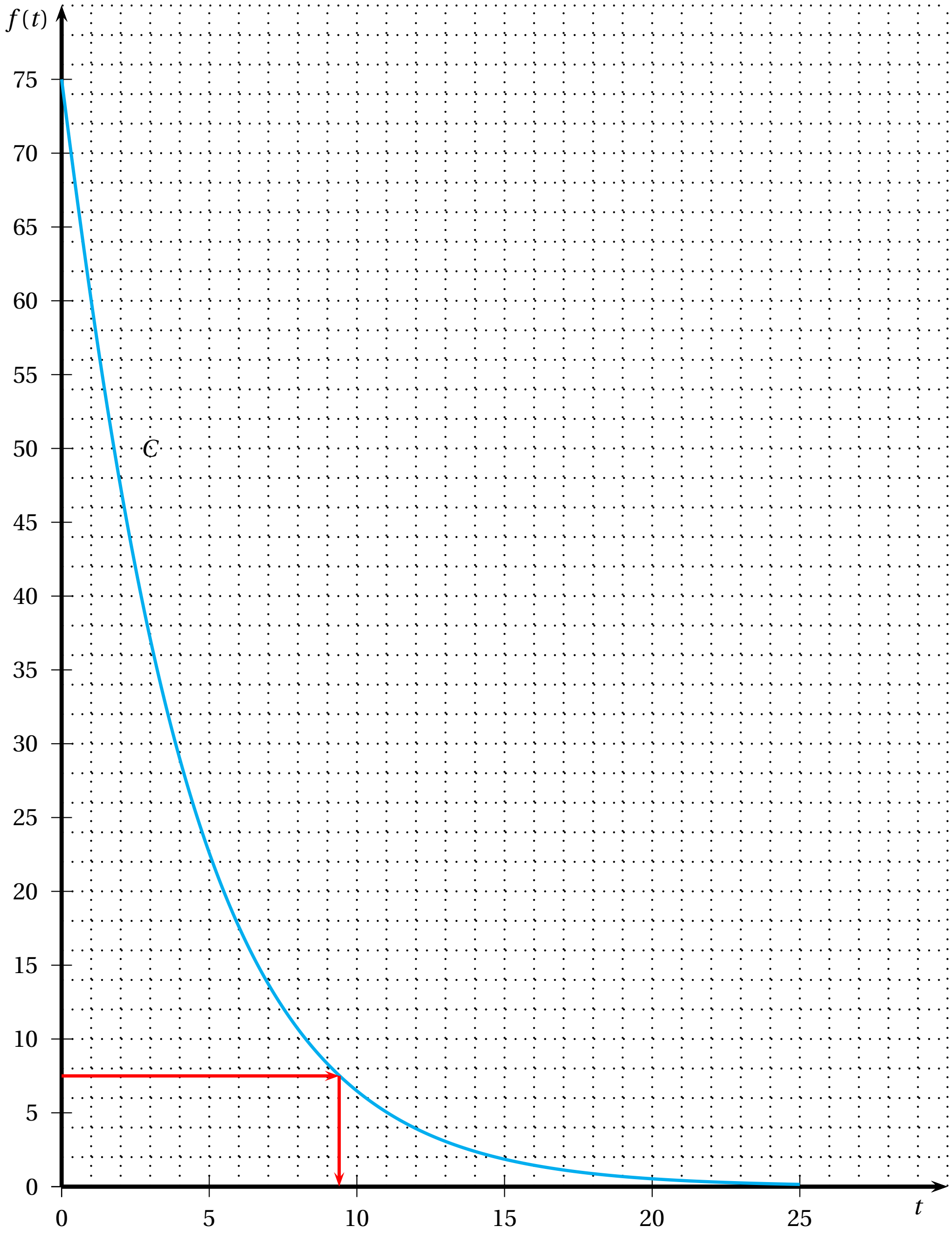
   Donc a fortiori pour $t > 0$, on a bien $-19,75 + 4\mathrm{e}^{-0,75t} < 0$.

   c. Comme $\mathrm{e}^{-0,25t} > 0$ quel que soit t, la dérivée $f'(t)$ est du signe de $-19,75 + 4\mathrm{e}^{-0,75t}$ donc négative sur $[0~;~+\infty[$: la fonction f est donc décroissante sur cet intervalle de $f(0) = 75$ à 0.

3. **a.**

t	0	5	10	15	20	25
$f(t)$	75	22,6	6,5	1,9	0,5	0,2

b.



4. **a.** $V_m = \dfrac{1}{20-0}\displaystyle\int_0^{20} f(t)\,\text{d}t$.

Or une primitive de $f(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ est $F(t) = \dfrac{79}{-0,25}\text{e}^{-0,25t} + 4\text{e}^{-t} = -316\text{e}^{-0,25t} + 4\text{e}^{-t}$, donc :

$V_m = \dfrac{1}{20}[F(20)-F(0)] = \dfrac{1}{20}\left(-316\text{e}^{-0,25\times 20} + 4\text{e}^{-20} - (316+4)\right) = \dfrac{1}{20}\left(-316\text{e}^{-5} + 4\text{e}^{-20} + 312\right)$.

b. La calculatrice livre $V_m \approx 15,5$.

C. Exploitation des résultats de la partie B

1. La concentration en polluant est inférieure ou égale à 2,5 mg/l si :

$\dfrac{1}{3}f(t) \leqslant 2,5 \iff f(t) \leqslant 7,5$.

On trace la droite d'équation $y = 7,5$ qui coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point dont l'abscisse est à peu près égale à 9,5.

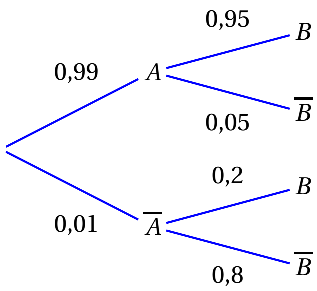
Il faudra donc attendre 10 semaines.

2. La valeur moyenne, au cours des 20 semaines suivant la contamination, de la concentration de polluant dans l'eau est égale à :
$\dfrac{1}{3}V_m \approx 5,2$.

EXERCICE 2 9 points

Toutes les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Probabilités conditionnelles



1. D'après l'arbre :
$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,99 \times 0,95 + 0,01 \times 0,2 = 0,9425$.
2. Il faut calculer $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,99 \times 0,95}{0,9425} \approx 0,9979$.

B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

1. Chacun des 400 tirages est indépendant des autres et chaque tirage a deux issues seulement : non vacciné de probabilité 0,01 et vacciné de probabilité 0,99.
X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(400\,;\,0,01)$.
2. Im faut calculer $P(X \leqslant 1)$.
$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_{400}^{0} \times 0,01^{0} \times 0,99^{400} + C_{400}^{1} \times 0,01^{1} \times 0,99^{399} \approx 0,0905$.
3. **a.** On a $\lambda = np = 400 \times 0,01 = 4$.
b. $P(X_1 > 5) = 1 - [P(X_1 \leqslant 5) = 1 - P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4) + P(X_1 = 5)] \approx 1 - (0,018 + 0,073 + 0,147 + 0,195 + 0,195 + 0,156) \approx 0,216$.
La probabilité qu'il y ait dans le tirage plus de cinq personnes non vaccinées est égale à environ 0,216.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

1. On a $m = np = 200 \times 0,8 = 160$.
De plus $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{32} \approx 5,66$.
2. La variable centrée réduite $T = \dfrac{Y_1 - 160}{5,66}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On a donc : $P(154,5 \leqslant Y_1 \leqslant 165,5) = P\left(\dfrac{154,5 - 160}{5,66} \leqslant T \leqslant \dfrac{165,5 - 160}{5,66}\right) \approx P(-0,97 \leqslant T \leqslant 0,97) = 2\Pi(0,97) - 1 \approx 2 \times 0,8340 - 1 \approx 0,868 \approx 0,87$ au centième près.