BTS Métropole Groupement C session 2000

EXERCICE 1 **11 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y' + 4y = 8,$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2$ est une solution de (E).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions

$$f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\mathrm{e}}{2} + 2.$$

Partie B

Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + 2.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Calculer la limite de f en $-\infty$, puis la limite de f en $+\infty$.
   b. En déduire que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
2. Calculer $f'(x)$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées).
4. Soit la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}$.
   Calculer $k'(x)$.
   En déduire l'aire, en cm^2, du domaine compris entre $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$.
   On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale arrondie à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 **9 points**

Les parties A, B, et C sont indépendantes

Partie A

Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement $0,010$ et $0,008$.
De plus, la probabilité de l'évènement : « la machine M_2 est en panne sachant que M_1 est en panne » est égale à 0,4.

1. Montrer que la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment est égale à $0,004$.
2. En déduire la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre des pièces fabriquées.

1. On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2.
   Une pièce est défectueuse si son diamètre n'appartient pas à l'intervalle
   $[246\,;\,254]$.
   On prélève au hasard une pièce dans la production.
   Calculer la probabilité d'avoir une pièce défectueuse.
2. On admet dans la suite que la probabilité de prélever une pièce défectueuse dans la production est égale à $0,046$. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 pièces prises au hasard, associe le nombre de pièces défectueuses de ce lot. Un lot de 50 pièces prises au hasard peut-être assimilé à un tirage avec remise.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Donner les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse dans un lot. (On donnera une valeur décimale approchée arrondie à 10^{-3} près).
   c. Calculer la probabilité d'avoir au plus 2 pièces défectueuses dans un lot. (On donnera une valeur décimale approchée arrondie à 10^{-3} près).
3. Après un certain temps de fonctionnement de la machine, pour vérifier le bien fondé de l'hypothèse faite en B. 1., on s'intéresse à la moyenne des diamètres des pièces produites.
   Pour cela, on étudie un échantillon de 100 pièces prises au hasard et avec remise dans la production. La moyenne $\overline{x}$ des diamètres des pièces de cet échantillon est égale à $249,7$. On suppose que la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres de ces pièces suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{2}{\sqrt{100}}$.
   Au vu de l'échantillon, déterminer un intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ avec le coefficient de confiance 95 %.