Brevet de technicien supérieur 12 mai 2016
Groupement C

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1 **10 points**

Une entreprise d'injection plastique est chargée de réaliser par moulage des hélices de mini-drones dans un nouveau matériau plastique.
La fabrication s'effectue en deux temps :

Phase 1 : injection sous pression de la matière fondue à une température initiale de 240 °C et maintien sous pression de la matière pendant les 3 premières secondes du refroidissement.

Phase 2 : poursuite du refroidissement et éjection de l'hélice.

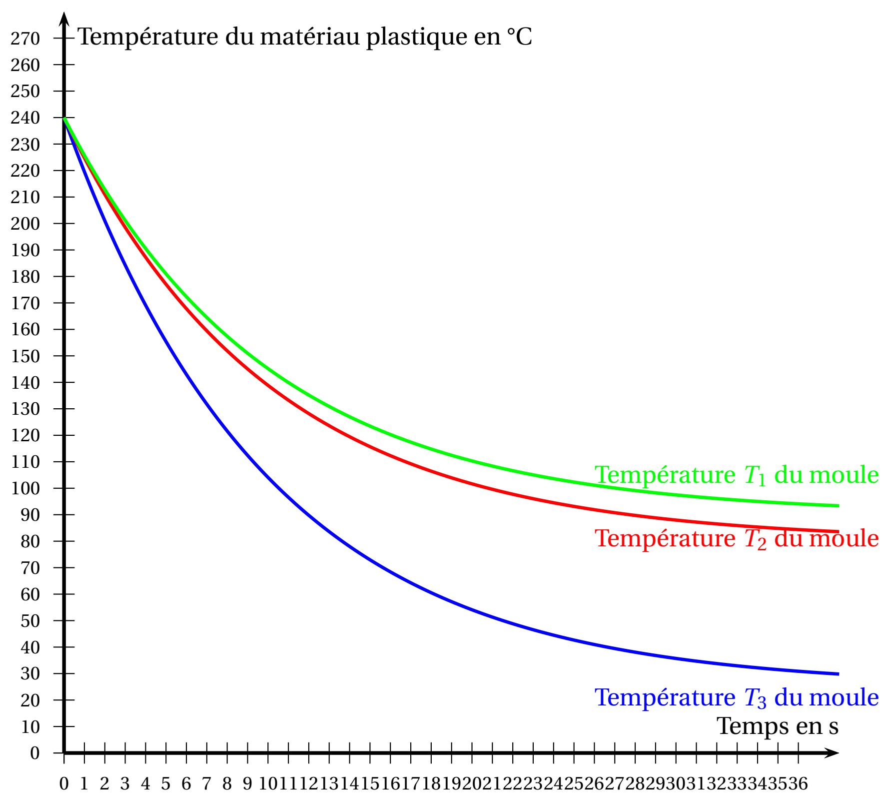
À l'issue de ces deux étapes le moule est refermé et une nouvelle hélice est introduite.

Pour être utilisable, on estime que le matériau plastique ne doit pas avoir perdu plus de 20 % de sa température initiale lors des 3 premières secondes du refroidissement.

Lors de la fabrication, afin de maîtriser le refroidissement de l'hélice, on étudie la température T à laquelle le moule doit être maintenu. En effet, pour garantir un remplissage homogène du moule, le matériau plastique ne doit pas refroidir trop vite lors de son injection dans le moule.

Partie 1

Des séries de mesures ont permis de réaliser trois courbes de refroidissement. Elles représentent l'évolution de la température du matériau plastique (exprimée en degrés Celsius) en fonction du temps (exprimé en secondes), pour trois valeurs différentes de la température du moule, T_1, T_2 et T_3.



1. Les trois températures satisfont-elles aux conditions souhaitées de fabrication d'une hélice ?

   Détailler la réponse.
2. On estime de plus que le matériau a suffisamment durci et que l'hélice peut être éjectée sans risque de déformation lorsque sa température atteint les 100 degrés.

   Parmi les températures qui satisfont aux conditions de fabrication, quelle est la température du moule qui permet de fabriquer le plus d'hélices dans un temps donné ? Expliquer.

Partie 2

On décide de maintenir le moule à une température de 80 °C. On s'intéresse à la fonction donnant la température du matériau plastique (exprimée en degrés) en fonction du temps (exprimé en secondes).
On admet que cette fonction est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : \quad y' + 0,1y = 8$$

Dans cette équation, y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$(E_0) : y' + 0,1y = 0.$$
2. Déterminer le réel a tel que la fonction g, définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = a$ soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) satisfaisant aux conditions de température du problème.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = 80\left(1 + 2\mathrm{e}^{-0,1t}\right).$$

Cette fonction f donne la température de l'hélice (en degrés) en fonction du temps t (en secondes) lorsque le moule est maintenu à une température de 80 °C.

1. **a.** Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f.

   b. Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

   c. Est-il possible d'interpréter ces résultats dans le contexte du problème ? Si oui, détailler.
2. **a.** Résoudre l'équation $f(t) = 100$ et donner une valeur approchée par excès à 10^{-1} de la ou des solutions éventuelles.

   b. Interpréter ce résultat dans le contexte du problème.
3. On souhaite de plus que la température moyenne du matériau plastique, durant la première phase de fabrication, c'est-à-dire durant les trois premières secondes, ne soit pas inférieure à 210 °C.

   On donne ci-dessous une copie d'écran obtenue avec un logiciel de calcul formel.

1	integrer(80*(1 + 2*exp(-0.1*t)),t)	
	$80*(t+\dfrac{2*\exp(-0.1*t)}{-0.1})$	M
2	simplifier(80*(t+2*exp(-0.1*t)/(-0.1)))	
	80*t-1600.0*exp(-0.1*t)	M

a. En utilisant cette copie d'écran, calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. La fonction f satisfait-elle la contrainte sur la température moyenne ?

Exercice 2 **10 points**

Partie 1 : Production de batteries

L'entreprise BatriPlus fabrique des batteries pour le téléphone Nova4 équipé du système d'exploitation
Dans un souci de contrôle de qualité de sa production, cette entreprise décide de procéder à un contrôle de l'autonomie de ces batteries.
Le contrôle consiste à prélever une batterie au hasard dans la production et, après l'avoir chargée et insérée dans un téléphone Nova4, de procéder à un test d'autonomie. Ce test est constitué d'une succession de visionnages vidéo, d'envois de courriels, de conversations téléphoniques, ... On détermine alors l'autonomie en mesurant le temps écoulé entre le démarrage du test et l'arrêt du téléphone par décharge de la batterie.
Une batterie est jugée conforme si l'autonomie est supérieure à $10,5$ heures.
On modélise l'autonomie par une variable aléatoire X qui, à toute batterie prélevée au hasard dans la production, associe son autonomie en heures. On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m = 11,5$ et d'écart type $\sigma = 0,53$.
Quelle est la probabilité qu'une batterie, prise au hasard dans la production, soit jugée conforme ?

Partie 2 : Commercialisation

La société PieceNov commercialise des lots de pièces détachées pour le téléphone Nova4 auprès de revendeurs et de réparateurs. Elle s'approvisionne pour 60 % de ses batteries auprès de la société Batriplus et pour le reste auprès de la société ElecBat.
On admet que 97 % des batteries fabriquées par BatriPlus et 95 % des batteries fabriquées par ElecBat sont conformes.

1. On prélève une batterie au hasard dans le stock pour la contrôler. On admet que toutes les batteries ont la même probabilité d'être choisies.

Démontrer que la probabilité que la batterie soit non conforme est $0,038$.

2. La société PièceNov commercialise les batteries par lots de 60.

On choisit au hasard un lot de 60 batteries dans le stock. On admet que le stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 60 batteries.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de batteries ainsi prélevées, associe le nombre de batteries non conformes du lot.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 batteries non conformes dans le lot.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 batteries non conformes dans le lot.

d. Calculer $E(Y)$.
Que représente ce nombre dans le cadre d'un grand nombre de lots ?

Partie 3 : Retour sur la production

Lors de la sortie du nouveau système d'exploitation OSNov8, l'entreprise BatriPlus décide de contrôler l'autonomie des batteries des téléphones Nov4 équipés du nouveau système.
Le responsable de la qualité désire alors savoir si l'utilisation de ce nouveau système d'exploitation a réduit l'autonomie des batteries.
On construit un test d'hypothèse unilatéral pour savoir si, au seuil de 5 %, on doit considérer que l'autonomie des batteries a diminué avec l'utilisation du nouveau système d'exploitation.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 batteries prélevées au hasard dans la production, associe son autonomie moyenne. On admet que X suit une loi normale d'espérance m et d'écart type $\sigma = 0,053$.

1. On choisit l'hypothèse alternative H_1 : « $m < 11,5$ ».
   Donner l 'hypothèse nulle H_0.
2. Sous cette hypothèse nulle, on obtient avec un tableur les résultats donnés en annexe 1.
   Déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-3} du réel a tel que
   $P\left(\overline{X} \geqslant a\right) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision du test.
   On prélève dans le stock un échantillon de 100 batteries et on mesure leur autonomie.
   À l'issue des tests, l'autonomie moyenne des batteries de cet échantillon est de 11,4 h.
4. Peut-on, au seuil de 5 %, considérer qu'avec l'utilisation du nouveau système d'exploitation l'autonomie des batteries a baissé ?
5. Quelle aurait été la conclusion si le test avait été réalisé au seuil de 1 % ?

Annexe 1

B2	=LOI.NORMALE (A2 ; 11,5 ; 0,053 ; 1)			
	A	B	C	D
1	x	$P\left(\overline{X} \leqslant x\right)$		
2	11,398	0,0271		
3	11,399	0,0283		
4	11,400	0,0296		
5	11,401	0,0309		
6	11,402	0,0322		
7	11,403	0,0336		
8	11,404	0,0350		
9	11,405	0,0365		
10	11,406	0,0381		
11	11,407	0,0397		
12	11,408	0,0413		
13	11,409	0,0430		
14	11,410	0,0447		
15	11,411	0,0466		
16	11,412	0,0484		
17	11,413	0,0503		
18	11,414	0,0523		
19	11,415	0,0544		