BTS Groupement B mai 2000

EXERCICE 1 **8 points**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise industrielle utilise de grandes quantités d'un certain type de boulons. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre de la tête ou le diamètre du pied d'un boulon est conforme à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-1} près.

1. Un boulon de ce type est considéré comme conforme pour le diamètre de sa tête si celui-ci est, en millimètres, compris entre $25,30$ et $25,70$.

   On note D la variable aléatoire qui, à chaque boulon choisi au hasard dans un lot très important, associe le diamètre de sa tête.

   On suppose que D suit la loi normale de moyenne $25,50$ et d'écart type $0,10$.

   Déterminer la probabilité qu'un boulon choisi au hasard dans le lot soit conforme pour le diamètre de la tête.

2. Dans un lot de ce type de boulons, 96 % ont le diamètre de la tête conforme.

   On prélève au hasard 10 boulons de ce lot pour vérification du diamètre de leur tête. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 boulons.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 boulons, associe le nombre de boulons conformes pour le diamètre de la tête.

   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un boulon ne soit pas conforme pour le diamètre de la tête.

3. Dans cette question, on veut contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en mm, des pieds de boulons constituant un stock très important ; on se propose de construire un test d'hypothèse.

   On note Y la variable aléatoire qui, à chaque boulon tiré au hasard dans le stock, associe le diamètre, en mm, de son pied.

   La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,1$.

   On désigne par $\overline{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 boulons prélevé dans un stock, associe la moyenne des diamètres des pieds de ces 100 boulons (le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

   L'hypothèse nulle est $\mathrm{H}_0 : \mu = 10$. Dans ce cas les boulons du stock sont conformes pour le diamètre de leur pied.

   L'hypothèse alternative est $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 10$.

   Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

   a. Justifier que, sous l'hypothèse nulle H_0, $\overline{Y}$ suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type $0,01$.

   b. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif h tel que $P(10 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 10 + h) = 0,95$.

   c. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

d. On prélève un échantillon de 100 boulons et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres des pieds est $\overline{y} = 10,03$.

Peut-on, au risque de 5 %, conclure que les boulons du stock sont conformes pour le diamètre de leur pied ?

EXERCICE 2 **12 points**

L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle dont une solution particulière est susceptible de définir une fonction de densité en probabilités.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

A . Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \qquad y'' - 4y = -\frac{16}{3}\mathrm{e}^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 4y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{3}x\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions

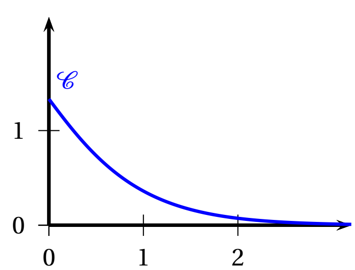
$$h(0) = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$

B . Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

Une représentation graphique $\mathscr{C}$ de f, dans un repère orthogonal, est donnée ci-dessous.



1. Le graphique suggère un sens de variation pour la fonction f. L'objet de cette question est de justifier ce résultat.
   a. Démontrer que, pour tout x de $[0~;~+\infty[$,
   $$f'(x) = -\frac{4}{3}(2x+1)\mathrm{e}^{-2x}.$$
   b. En déduire le sens de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.
2. Le graphique permet d'envisager une asymptote en $+\infty$ pour la courbe $\mathscr{C}$. À partir de l'expression de $f(x)$, déterminer une limite de f justifiant cette propriété graphique.
3. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}$.

b. En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}$ et T, pour x positif au voisinage de 0.

4. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donner une valeur approchée, arrondie au centième, de l'intégrale I.

Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.

b. Sur l'écran d'une calculatrice, équipée d'un logiciel particulier (calcul formel), on lit le résultat suivant, où t est un nombre réel positif quelconque :

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)\mathrm{e}^{-2t} + 1.$$

Ce résultat est admis ici et n'a donc pas à être démontré.

Déterminer $\lim\limits_{t\to\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)\mathrm{e}^{-2t}$.

c. Soit $\mathscr{A}(t)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe $\mathscr{C}$, et la droite d'équation $x = t$ où t est un nombre réel positif.

Déterminer $J = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

d. Déterminer la valeur exacte de $J - I$ où $I = \mathscr{A}(3)$ a été calculé à la question 4. a., et en déduire la double inégalité : $0 \leqslant J - I \leqslant 10^{-2}$.

Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation graphique de $J - I$.