Brevet de technicien supérieur Métropole session mai 2013 - Groupement B2 : BTS CIM

Exercice 1

1. Avec les notations du formulaire, on a

$$a(x) = 1$$
$$b(x) = 0,25x$$

d'où $g(x) = \frac{b(x)}{a(x)} = 0,25x$ et une primitive est $G(x) = 0,125x^2$.
La solution générale de l'équation (E_0) est alors donnée par

$$y_0(x) = k\mathrm{e}^{-0,125x^2} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = 0$ pour tout réel donc

$$\begin{aligned} h'(x) + 0,25h(x) &= 0,25x \times 1 \\ &= 0.25x \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la fonction h est une solution particulière de l'équation (E).

3. L'ensemble des solutions de (E) est donné par la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (E_0). On obtient alors

$$y(x) = k\mathrm{e}^{-0,125x^2} + 1 \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

4. On a déjà

$$F(x) = k\mathrm{e}^{-0,125x^2} + 1$$

et on veut $F(0) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} k + 1 &= 0 \\ k &= -1 \end{aligned}$$

La fonction cherchée est alors

$$F(x) = 1 - e^{-0,125x^2}$$

Partie A

1. a. La bonne réponse est la réponse $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0.125x^2} = 0$.

b. La bonne réponse est la réponse Asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

2. a. En utilisant la dérivation d'un produit, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,25\mathrm{e}^{-0,125x^2} + 0,25x(-0,125 \times (2x) \times \mathrm{e}^{-0,125x^2}) \\ &= (0,25 - 0,0625x^2)\mathrm{e}^{-0,125x^2} \\ &= 0,0625(4 - x^2)\mathrm{e}^{-0,125x^2} \\ &= 0,0625(2 - x)(2 + x)\mathrm{e}^{-0,125x^2} \end{aligned}$$

b. Comme $0,0625$, $2+x$ et $\mathrm{e}^{-0,125x^2}$ sont positifs lorsque x est positif, le signe de la dérivée ne dépend que du signe de $2-x$.
Le tableau de signe de la dérivée de f est le suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. Tableau de variation de la fonction f

x	0		2		$+\infty$
f			$\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}{2}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

On a $f(2) \approx 0,303$

3. a. Par troncature à l'ordre 1 du développement limité donné, une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 0,25x$.

b. Pour étudier le positionnement, il convient d'étudier le signe de $-0,03125x^3$, signe identique à celui de $-x^3$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^3$		$+$	0	$-$	

Donc au voisinage de zéro la courbe est en dessous de la tangente (Attention à l'ensemble de définition).

Partie A

1. a. On a

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,125x^2} = 0\end{array}\right.$$

alors par soustraction, on a

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

b. Voyons si $F'(x) = f(x)$ pour tout x réel positif ou nul.
$F'(x) = 0 - (-0,125 \times (2x) \times \mathrm{e}^{-0,125x^2} = 0,25x\mathrm{e}^{-0,125x^2} = f(x)$

2.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= F(6) - F(1)\\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-4,5}\right) - \left(1-\mathrm{e}^{-0,125}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-0,125} - \mathrm{e}^{-4,5}\end{aligned}$$

3. On obtient $I \approx 0,87$.

Exercice Groupe B1

Loi de Poisson

1. $P(X=6)=e^{-6}\frac{6^6}{6!}\approx 0,16$
2. $P(X\leqslant 6)=P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=6)$
   soit $0,61$ (Cumuls des valeurs dans le formulaire ou calculatrice !).

Partie : Loi normale

1. La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 3 alors la variable aléatoire $T=\frac{X-250}{3}$ suit la loi normale centrée $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. On a donc :

$$\begin{aligned}P(245\leqslant Y\leqslant 255)&=P\left(\frac{245-250}{3}\leqslant T\leqslant\frac{255-250}{3}\right)\\&=P(-1,67\leqslant T\leqslant 1,67)\\&=2\Pi(1,67)-1\\&=2(0,9525)-1\\&\approx 0,91\end{aligned}$$

2. On est ramené à $P\left(\frac{-5}{\sigma}\leqslant T\leqslant\frac{5}{\sigma}\right)=0,97$
   Soit $2\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right)-1=0,97$ ou encore $\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right)=0,985$.
   On alors $\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right)=\Pi(2,17)$.
   Ainsi $\sigma=\frac{5}{2,17}$ et $\sigma\approx 2,3$.

Partie : Loi binomiale

1. Chaque prélèvement est constitué de 50 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise ;
   Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
   — soit le succès : le tube n'est pas conforme de probabilité $p=0,03$,
   — soit l'échec : le tube est conforme de probabilité $q=1-p=0,97$;
   La variable aléatoire Z mesure le nombre de succès,
   alors la variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0,03$.
2. On demande

$$\begin{aligned}p(Z=0)&=\mathrm{C}_{50}^{0}\,0,03^{0}\times 0,97^{50}\\&=0,97^{50}\\&\approx 0,22\end{aligned}$$

3. On demande

$$\begin{aligned}p(Z\geq 1)&=1-p(Z=0)\\&\approx 0,78\end{aligned}$$

Partie : Test d'hypothèse

1. On prélève un échantillon de taille 50 tubes dans le lot et on regarde la moyenne des longueurs des tubes $\bar{L}$.
   Si $\bar{L}\in[249,35\ ;\ 250,65]$, on accepte l'hypothèse H_0 au seuil de 5 %.
   Sinon, on rejette H_0 et on accepte H_1 au seuil de 5 %.
2. La moyenne de l'échantillon est dans la zone donc on accepte H_0 au seuil donné.
   Le lot est donc conforme à ce seuil donné.

Exercice : Groupe B2 : BTS CIM
Partie A

1. **a.** On a

$$\boxed{f(1) = 2, \quad f(3) = 0, \quad f(3,2) = 0}$$

b. Courbe

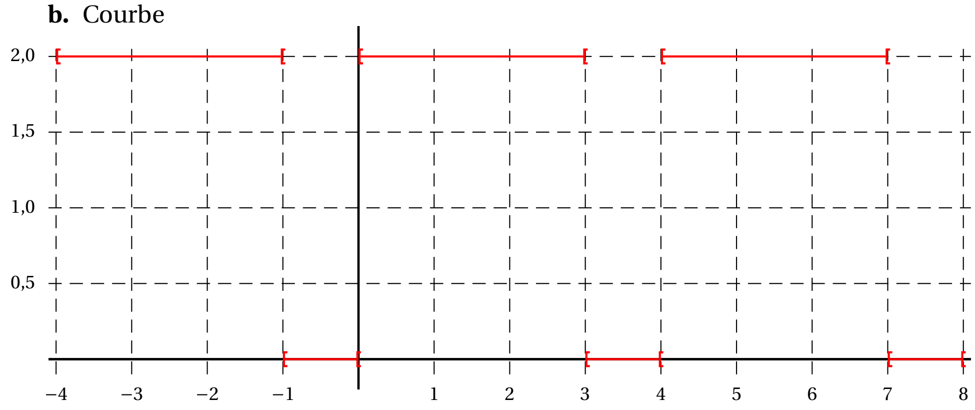

FIGURE 1 – représentation graphique de la fonction f

2. La bonne réponse est

$$\boxed{\text{Si } x \in [14~;~15], \quad f(x) = 2}$$

3. En notant T la période de la fonction, on a $\omega = \frac{2\pi}{T}$, avec ici $T = 4$ d'où

$$\boxed{\omega = \frac{\pi}{2}}$$

Partie B

1. On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\mathrm{d}x[t] \\ &= \frac{1}{4}\int_0^3 2\mathrm{d}x[t] \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{a_0 = \frac{3}{2}}$$

2. **a.** Soit $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \cos n\frac{\pi}{2} t\mathrm{d}x[t] \\ &= \left[\frac{2}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2} t\right]_0^3 \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin 3n\frac{\pi}{2} - \sin(0) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}x[t] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 2\times\cos n\frac{\pi}{2}t\,\mathrm{d}x[t] \\ &= I \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\quad a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}}$$

c. On obtient immédiatement

$$\boxed{a_1 = -\frac{2}{\pi},\quad a_2 = 0,\quad a_3 = \frac{2}{3\pi}}$$

Partie C

TABLE 1 – Tableau des valeurs prises par a_n et b_n

n	0	1	2	3
a_n	1,5	−0,637	0	0,212
b_n		0,637	0,637	0,212

1.

2. **a.** On a

$$\boxed{P \approx 2,90}$$

b. On en tire alors $\frac{3-P}{3} \approx 0,03$ d'où

$$\boxed{\frac{3-P}{3} < 0,04}$$

Exercice 2

Partie A

1. **a.** On a

$$\boxed{f(1) = 2,\quad f(3) = 0,\quad f(3,2) = 0}$$

b. Courbe

2. La bonne réponse est

$$\boxed{\text{Si } x \in [14~;~15],\quad f(x) = 2}$$

3. En notant T la période de la fonction, on a $\omega = \frac{2\pi}{T}$, avec ici $T = 4$ d'où

$$\boxed{\omega = \frac{\pi}{2}}$$

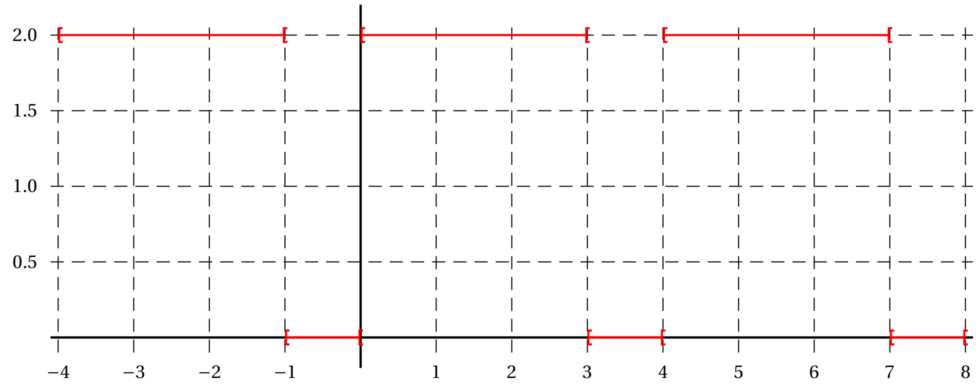

FIGURE 2 – représentation graphique de la fonction f

Partie B

1. On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}\,x[t] \\ &= \frac{1}{4}\int_0^3 2\,\mathrm{d}\,x[t] \\ &= \frac{1}{2}\times 3 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{a_0 = \frac{3}{2}}$$

2. **a.** Soit $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \cos n\frac{\pi}{2}t\,\mathrm{d}\,x[t] \\ &= \left[\frac{2}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}t\right]_0^3 \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin 3n\frac{\pi}{2} - \sin(0) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}\,x[t] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 2\times\cos n\frac{\pi}{2}t\,\mathrm{d}\,x[t] \\ &= I \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\quad a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}}$$

c. On obtient immédiatement

$$\boxed{a_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{2}{3\pi}}$$

Partie C

TABLE 2 – Tableau des valeurs prises par a_n et b_n

n	0	1	2	3
a_n	$1,5$	$-0,637$	0	$0,212$
b_n		$0,637$	$0,637$	$0,212$

1.

2. a. On a

$$\boxed{P \approx 2,90}$$

b. On en tire alors $\frac{3-P}{3} \approx 0,03$ d'où

$$\boxed{\frac{3-P}{3} < 0,04}$$