# Brevet de technicien supérieur
# Métropole–Antilles–Guyane
# session 2014 - groupement B2

**Exercice 1** **10 points**

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante**

**A. Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x},$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y'$ la fonction dérivée de $y$ et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$.

   **b.** En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

2. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   Une solution de l'équation différentielle $(E)$ est donnée par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous.

| | | |
|---|---|---|
| $g(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$ | $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ | $k(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$ |

   Les dérivées première et seconde de ces fonctions sont données ci-dessous (ces calculs sont exacts).

$$g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} \qquad h'(x) = \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad k'(x) = (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$$
$$g''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \qquad h''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad k''(x) = (-4 + 2x)\mathrm{e}^{-x}$$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.

**B. Étude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression de la dérivée de $f$. Ce logiciel note $\%\mathrm{e}^{-x}$ la quantité $\mathrm{e}^{-x}$.

| | |
|---|---|
| (%i1) | $f(x) := \left(x^2 - 1\right) * \%\mathrm{e}^{-x}$ ; |
| (%o1) | $f(x) := \left(x^2 - 1\right)\%\mathrm{e}^{-x}$ |
| (%i2) | factor(diff($f(x)$, $x$) ; |
| (%o2) | $-\left(x^2 - 2x - 1\right)\%\mathrm{e}^{-x}$ |

Justifier par un calcul l'expression de $f'(x)$ affichée à la ligne notée (%o2).

**b.** On rappelle qu'une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a$ est donnée par : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

**2. a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \longmapsto \text{e}^t$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction : $x \longmapsto \text{e}^{-x}$.

**b.** En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

**c.** *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification.*

*La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $T$. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

| | | |
|---|---|---|
| $-1+x$ est positif au voisinage de 0. | $\dfrac{x^2}{2}$ est positif au voisinage de 0. | $x^2\epsilon(x)$ est positif au voisinage de 0. |

## C. Calcul intégral

**1.** On note $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x$ où $f$ est la fonction définie dans la partie B.

**a.** Un logiciel de calcul formel fournit, à la ligne notée (%o3), une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$. Ce logiciel note $\%\text{e}^{-x}$ l'expression $\text{e}^{-x}$.

| | |
|---|---|
| (%i3) | factor(integrate $(f(x), x)$) ; |
| (%o3) | $-(x+1)^2\%\text{e}^{-x}$ |

Justifier ce résultat.

**b.** Montrer que la valeur exacte de $I$ est : $I = 4\text{e}^{-1} - 16\text{e}^{-3}$.

**2.** *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

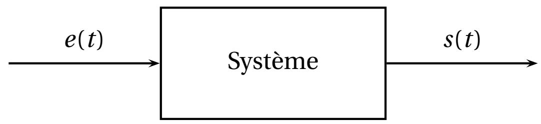
On admet que $f(x)$ est positif pour $x$ dans l'intervalle $[1\,;3]$.

| | | |
|---|---|---|
| $I$ est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$. | $I$ est une mesure, en cm$^2$ de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$. | $I$ est une mesure, en unités d'aire de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $y=1$ et $y=3$. |

**Exercice 2** **10 points**

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante**

On considère un système, électrique ou mécanique. On désigne par $e(t)$ le signal d'entrée et par $s(t)$ le signal de sortie.




On note $E(p) = \mathscr{L}(e(t))$ et $S(P) = \mathscr{L}(s(t))$, où $\mathscr{L}$ est la transformée de Laplace.
On désigne par $\mathscr{U}$ la fonction échelon unité définie par $\mathscr{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathscr{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$.
L'équation différentielle régissant ce système s'écrit :

$$2s'(t) + s(t) = e(t),$$

où la fonction inconnue $s$ vérifie $s(t) = 0$ pour tout nombre réel $t$ négatif ou nul (en particulier $s(0+) = 0$).

### A. Étude du signal d'entrée

On suppose que le signal d'entrée $e$ est donné par :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \text{ ou } t \geqslant 1. \end{cases}$$

1. **a.** Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle $[-1 ; 4]$. On prendra comme unité 2 cm pour l'axe des abscisses et 5 cm pour l'axe des ordonnées.

   **b.** Justifier, par exemple à l'aide d'un tableau, que, pour tout nombre réel $t$ :

$$e(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1).$$

2. **a.** Déterminer $\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))$ et $\mathscr{L}(\mathscr{U}(t-1))$.

   **b.** En déduire $E(p)$.

### B. Recherche de la transformée de Laplace du signal de sortie

1. Exprimer à l'aide de $S(p)$ :

   **a.** $\mathscr{L}(s'(t))$.

   **b.** $\mathscr{L}(2s'(t) + s(t))$.

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, montrer que $S(p) = \dfrac{1}{p(2p+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right)$.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel $p$, on a : $\dfrac{1}{p(2p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+\frac{1}{2}}$.

4. En déduire que $S(p)$ peut s'écrire : $S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p} - \dfrac{1}{p+\frac{1}{2}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p+\frac{1}{2}}$.

### C. Obtention du signal de sortie

On recherche l'original de $S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p} - \dfrac{1}{p+\frac{1}{2}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p+\frac{1}{2}}$.

**1.** Un logiciel de calcul formel fournit l'affichage suivant.

| |
|---|
| >>> inverselaplacetransform(1/p-exp(-p)/p-1/(p+1/2)+exp(-p)/(p+1/2), p, t) |
| $\theta(t)-\theta(t-1)-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\theta(t)+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\theta(t-1)$ |

Le logiciel note $\theta$ la fonction échelon unité désignée par $\mathcal{U}$ dans cet exercice.
En utilisant cet affichage et le formulaire, donner les originaux de :

$$\frac{1}{p} \quad ; \quad \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} \quad ; \quad \frac{1}{p+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p+\frac{1}{2}}$$

Donner une expression de $s$ à l'aide de $\mathcal{U}$.

**2.** **a.** Préciser $s(t)$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$.

**b.** Soit $t$ un nombre réel dans l'intervalle $[0\ ;\ 1[$. Montrer que $s(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

**c.** Soit $t$ un nombre réel dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$. Montrer que $s(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1\right)$.

**3.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, où $s(t)$ est arrondi au centième.

| $t$ | $-1$ | $-0,5$ | 0 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s(t)$ | 0 | | | | | | | | | | | |

**4.** Sur le graphique de la partie A, représenter la fonction $s$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$.