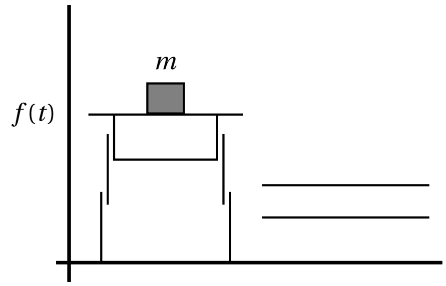
Brevet de technicien supérieur Métropole–Antilles–Guyane
13 mai 2015 - groupement B2

Exercice 1 **10 points**

Sur une chaîne de montage, une pièce de 10 kg est située sur un plateau.
On note $f(t)$ la cote (en mètres) du plateau à l'instant t (en secondes), calculée par rapport au sol.
On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
L'objectif de l'exercice est d'étudier f afin de réaliser correctement le transfert de la pièce sur un tapis roulant.



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 5y' + 4y = 10,$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 5r + 4 = 0$.

   b. En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

On fournit les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

2. Un logiciel de calcul formel résout ci-dessous l'équation différentielle (E).
   La ligne d'entrée (%i1) est la ligne de commande de la résolution de l'équation différentielle (E).
   La ligne notée (%o1) est la ligne de sortie.
   Ce logiciel note %e^{-t} la quantité e^{-t} et %k1 et %k2 deux constantes réelles k_1 et k_2.

```
(%i1)  ode2 ('diff(y,t,2)+5*'diff(y, t) + 4*y=10,y, t);
```

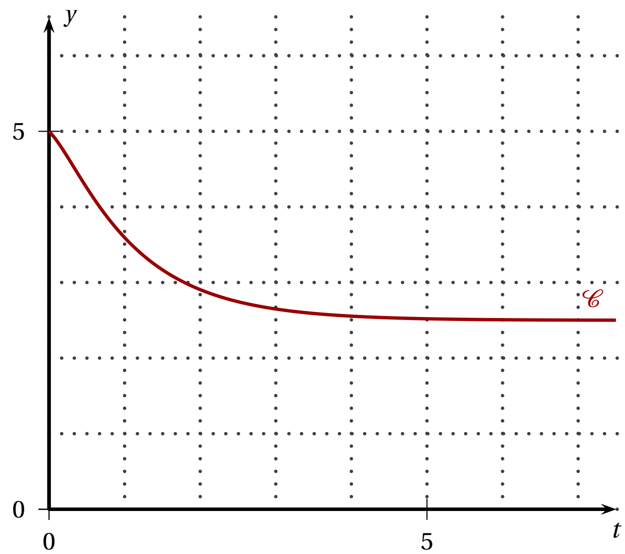
(%o1) $y = \%k1 * \%e^{-t} + \%k2\%e^{-4t} + \frac{5}{2}$

   L'étude du système mécanique montre que f est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 5$ et $f'(0) = -1$.
   En utilisant le résultat du logiciel, qu'on ne demande pas de démontrer, déterminer une expression de $f(t)$ en fonction de t.

B. Étude d'une fonction

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthogonal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = 3\text{e}^{-t} - 0,5\text{e}^{-4t} + 2,5.$$



1. **a.** Conjecturer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une expression de la dérivée de f.
   La ligne d'entrée (%i2) est la ligne de commande d'une écriture factorisée de la dérivée de f.
   La ligne notée (%o2) est la ligne de sortie.
   Ce logiciel note $\%\text{e}^{-4t}$ la quantité e^{-4t} et $\%\text{e}^{3t}$ la quantité e^{3t}.

```
(%i2) factor (diff (3*exp (- t) - 0.5*exp(- 4*t)+2.5,t));
rat : replaced 2.0 by 2/1 = 2.0
(%o2)   -%e^(-4t)(3%e^(3t) - 2)
```

   On admet que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $3\text{e}^{3t} - 2 > 0$. En utilisant, sans le démontrer, le résultat du logiciel, justifier la conjecture de la question 1. a.

2. Le logiciel de calcul formel permet d'obtenir le développement limité de la fonction f, à l'ordre 2, au voisinage de 0.
   La ligne d'entrée (%i3) est la ligne de commande de ce développement limité.
   La ligne notée (%o3)/T/ est la ligne de sortie.

```
(%i3) taylor (3*exp(-t)-0.5*exp(-4*t)+2.5,t,0,2);
rat : replaced 2.5 by 5/2 = 2.5
rat : replaced -0.5 by -1/2 = -0.5
(%o3)/T/    5 - t - 5t^2/2 + ...
```

   a. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   Le développement limité de la fonction f, à l'ordre 2, au voisinage de 0 est :

$5-t-\dfrac{5}{2}t^2$	$5-t-\dfrac{5}{2}t^2+t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t)=0$	$5-t+t\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t)=0$	$-\dfrac{5t^2}{2}+t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t)=0$

b. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T au voisinage du point d'abscisse 0.

3. a. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

On fournit les limites suivantes : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t=+\infty$; $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t=0$.

b. Interpréter graphiquement la limite obtenue à la question 3. a. en termes d'asymptote.

C. Application au transfert de la pièce sur le tapis roulant

On admet la modélisation selon laquelle la cote $f(t)$ (en mètres) du plateau à l'instant t (en secondes), calculée par rapport au sol, est donnée par la fonction f définie et représentée dans la partie B.
La partie supérieure du tapis roulant est située à 2,5 mètres du sol. La pièce peut être transférée dès qu'elle se situe à un centimètre du tapis roulant.

1. À partir de quel instant t_0 la pièce peut-elle être transférée sur le tapis roulant ?
Pour cette question, on attend une valeur approchée de t_0 arrondie au dixième par excès, obtenue à l'aide de la calculatrice, en expliquant la méthode suivie.
2. L'algorithme suivant affiche les bornes d'un encadrement de t_0.

Variables :	a, b, m
Initialisation :	a prend la valeur 5 b prend la valeur 6
Traitement :	Tant que $b-a>0,1$ m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Si $f(m)>2,51$ alors a prend la valeur m Sinon b prend la valeur m Fin de Si Fin de Tant que
Sortie :	Afficher a et b

a. Faire tourner cet algorithme « à la main » sur trois étapes en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3
a	5		
b	6		
$b-a$			
m			

b. Que peut-on dire de l'amplitude de l'encadrement de t_0 fourni par cet algorithme ?

Exercice 2 **10 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Soit f la fonction périodique de période $T=4$, impaire, définie par :

$$f(t)=t \text{ si } t\in]-1;1[\text{ et } f(t)=0 \text{ si } t\in[1;2]$$

On note ω la pulsation associée à la fonction f.

Un formulaire sur les séries de Fourier figure à la dernière page

A. Étude d'une fonction

1. **a.** Justifier que $f(1,3) = 0$.

   b. Justifier que $\omega = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Tracer sur la feuille de copie, dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2;6]$.

3. *Chacune des deux questions suivantes est une question à choix multiples. Pour chaque question :*

   - *Une seule réponse est exacte ;*
   - *recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte ;*
   - *la réponse juste rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.*

   a. On a :

$f(4,6) = 0.$	$f(4,6) = -0,6.$	$f(4,6) = 0,6.$

   b. Si $t \in]3;5[$, alors :

$f(t) = t-4.$	$f(t) = t-3.$	$f(t) = t+4.$

B. Calcul des coefficients de Fourier et application à un calcul de puissance

On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de la fonction f.

1. Justifier que pour tout n, $a_n = 0$.

2. Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} t \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

   La ligne d'entrée (%i1) est la ligne de commande du calcul de l'intégrale.
   La ligne notée (%o1) est la ligne de sortie fournissant le résultat du calcul de l'intégrale.
   Ce logiciel note, dans sa ligne de commande, %pi le nombre π.

(%i1)	`integrate(t*sin(n*%pi*t/2),t,-1,1);`
(%o1)	$\dfrac{2\left(4\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 2\pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)}{\pi^2 n^2}$

   Le résultat fourni n'a pas a être justifié.

   a. En admettant le résultat fourni par le logiciel, justifier que, pour tout entier naturel n non nul,

$$b_n = \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(4\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 2\pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right).$$

   b. Donner la valeur exacte des coefficients b_1 et b_2.

3. On désigne par P la puissance moyenne par période de la fonction f. Pour cette fonction, le nombre P est donné par

$$P = 0,5\int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t.$$

   Vérifier par un calcul que $P = \dfrac{1}{6}$.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on note

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2 .$$

Un tableur donne ci-dessous, selon les valeurs de n, les valeurs arrondies à 10^{-4} de b_n, S_n et $\frac{S_n}{P}$. L'affichage de la cellule D3 a été masqué.

B2 =(4*SIN(PI()*B1/2)-2*PI()*B1*COS(PI()*B1/2))/(PI()*B1)^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	bn	0,4053	0,3183	-0,0450	-0,1592	0,0162	0,1061	-0,0083	-0,0796	0,0050	0,0637	-0,0033	-0,0531	0,0024	0,0455
3	Sn	0,0821	0,1328		0,1465	0,1466	0,1522	0,1523	0,1554	0,1554	0,1575	0,1575	0,1589	0,1589	0,1599
4	Sn/P	0,4928	0,7967	0,8028	0,8788	0,8796	0,9134	0,9136	0,9326	0,9326	0,9448	0,9448	0,9533	0,9533	0,9595

a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} du nombre S_3.

b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $\frac{S_n}{P} \geq 0,95$.

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right), (n \in \mathbb{N})$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$