Brevet de technicien supérieur
Métropole–Antilles–Guyane
session 2013 - groupement B1

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante
Dans cet exercice, on étudie des fonctions intervenant dans les prévisions sur la vitesse moyenne du vent pour l'implantation d'éoliennes.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \qquad y' + (0,25x)y = 0,25x$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \qquad y' + (0,25x)y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction constante h, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.
   Remarque : la fonction F intervient dans la partie C de cet exercice

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (0,25x)\mathrm{e}^{-0,125x^2}$$

Remarque : la fonction f n'est pas une solution de l'équation différentielle (E).

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. *Les questions a. et b. suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est égal à :

$+\infty$	$-\infty$	0

   b. En $+\infty$ la courbe C admet une asymptote d'équation :

$y = -0,125x^2$	$y = 0$	$x = 0$

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = 0,0625(2+x)(2-x)\mathrm{e}^{-0,125x^2}$$

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3. Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de la fonction f, à l'ordre 3, au voisinage de zéro :

$$f(x) = 0,25x - 0,031\,25x^3 + x^3\epsilon(X) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

a. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de T et de C au voisinage du point d'abscisse 0, pour x positif.

C. Application à l'étude de la vitesse du vent

1. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-0,125x^2}.$$

a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

b. Démontrer que F est une primitive sur $[0~;~+\infty[$ de la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (0,25x)\mathrm{e}^{-0,125x^2}.$$

2. Calculer $I = \displaystyle\int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x$. Donner la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2}.

Le résultat précédent donne la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse moyenne du vent soit comprise entre 1 *m/s et* 6 *m/s.*

Exercice 2 **8 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi de Poisson

On désigne par X la variable aléatoire qui, a tout intervalle de temps d'une durée de 30 secondes, associe le nombre de skieurs se présentant à une remontée mécanique, entre 14 heures et 15 heures. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.

1. Déterminer la probabilité $P(X = 6)$.

2. Calculer la probabilité que, pendant un intervalle de temps d'une durée de 30 secondes pris au hasard entre 14 heures et 15 heures, il se présente au plus 6 skieurs.

B. Loi normale

Une entreprise découpe une grande quantité de tubes pour le montage des remontées mécaniques. La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245~;~255]$.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

1. Après un réglage de la machine, on admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 3.

   Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la production de cette journée soit conforme pour la longueur.

2. Le résultat obtenu au 1. n'est pas jugé satisfaisant. On décide de modifier l'écart type à l'aide d'un nouveau réglage de la machine. Dans cette question, la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type σ.

   Déterminer l'écart type σ pour que $P(245 \leqslant Y \leqslant 255) = 0,97$.

C. Loi binomiale

Dans un lot de tubes, 3 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 lots.
On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité $P(Z = 0)$.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.

D. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ inconnue des longueurs, exprimées en millimètres, d'un lot important de tubes destinés au montage des remontées mécaniques.
On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 50 tubes prélevés au hasard dans ce lot, associe la moyenne des longueurs de ces tubes (le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 250$. Dans ce cas, on considère que le lot est conforme.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 250$.
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 0,33.

   On admet également que $P(249,35 < \overline{L} < 250,65) = 0,95$. Ce résultat n'a pas à être démontré.

   Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 50 tubes dans le lot et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des longueurs des tubes est $\overline{\ell} = 250,49$.

   Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que ce lot est conforme ?