∽ BTS Groupement A novembre2002 ∾ Nouvelle-Calédonie

EXERCICE 1 **10 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.
La résolution de la partie B ne nécessite aucune connaissance dans le domaine des probabilités.

On suppose qu'un système est surveillé par séquences d'une durée d.

Partie A

On note Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de remplacements d'un élément du système pendant une durée d de fonctionnement de ce système. On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramètre $2d$.

1. Dans cette question, on prend $d = 3$.
   a. Donner le nombre moyen de remplacements pendant une séquence de durée d.
   b. Déterminer la probabilité qu'il y ait plus de 6 remplacements pendant une séquence de durée d.
   c. Déterminer la plus petite valeur de l'entier k telle que $P(Z \leqslant k) \geqslant 0,95$.
   Ce nombre k représente le nombre maximum de remplacements à effectuer sur une période d, avec un degré de confiance de 95 %.
2. Pour quelle valeur de d, la probabilité qu'il y n'ait aucun remplacement à effectuer pendant une séquence de durée d est-elle égale à 0,8 ?

Partie B

Un système est composé de deux éléments identiques au précédent et d'un réparateur. Tant que l'un de ces deux éléments fonctionne, le système est considéré comme étant en bon fonctionnement.

On s'intéresse à la probabilité, notée r, que le système fonctionne correctement pendant une durée t.
On démontre que $r(t) = x(t) + y(t)$ où x et y sont des fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et solution du système S :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 3y(t) - 4x(t) \\ y'(t) & = & 4x(t) - 5y(t) \end{array}\right. \quad \text{avec les conditions initiales } x(0) = 1 \text{ et } y(0) = 0.$$

$x(t)$ est la probabilité qu'un élément du système fonctionne à l'instant t et $y(t)$ est la probabilité que les deux éléments du système de fonctionnement à l'instant t.

1. On suppose que les fonctions x, y et r admettent des transformées de Laplace notées respectivement X, Y et R.
   En appliquant la transformation de Laplace au système S, montrer que :
   $$R(p) = \frac{p+9}{(p+8)(p+1)}$$
2. Déterminer les réels A et B tels que $R(p) = \dfrac{A}{p+8} + \dfrac{B}{p+1}$.

3. Déterminer l'original r de R.

4. Démontrer que la fonction r est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Calculer sa limite en $+\infty$.

5. Calculer l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-8t}+8\mathrm{e}^{-t}}{7}\,\mathrm{d}t$.

Cette intégrale représente la durée moyenne de bon fonctionnement du système.

EXERCICE 2 **10 points**

On désigne par τ un réel appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et par E une constante strictement positive.

On considère un signal périodique modélisé par la fonction f de période $T = 2\pi$, impaire, définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcrll} f(t) & = & 0 & \text{si} & t \in [0\,;\,\tau] \\ f(t) & = & -E & \text{si} & t \in]\tau\,;\,\pi-\tau[\\ f(t) & = & 0 & \text{si} & t \in [\pi-\tau\,;\,\pi] \end{array}\right.$$

1. Construire, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de f sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f.

Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}$, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} b_{2p} & = & 0 \\ b_{2p+1} & = & -\dfrac{4E}{\pi(2p+1)}\cos[(2p+1)\tau] \end{array}\right.$

3. Déterminer τ pour que la fonction u_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $u_3(t) = a_3\cos(3t) + b_3\sin(3t)$ soit nulle sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que la fonction satisfait aux conditions de Dirichlet.

On note $S(t)$ la somme de la série de Fourier associée à f.

Déterminer $S(0)$, $S(\tau)$ et $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Dans cette question, on choisit $\tau = \dfrac{\pi}{6}$.

a. Calculer le carré de la valeur efficace sur une période de la fonction f, c'est-à-dire le nombre f_e^2 tel que $f_e^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Calculer $k = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

Donner l'arrondi à 10^{-3} près du rapport $\dfrac{k}{f_e^2}$.