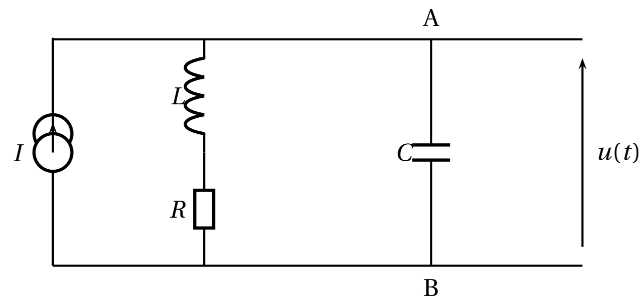
BTS Groupement A Nouvelle Calédonie novembre 2000

EXERCICE 1 **6 points**

On considère le circuit suivant



R, L et C sont des constantes réelles, strictement positives, caractéristiques du circuit.
Le générateur de courant idéal délivre un échelon de courant défini par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} I(t) & = & 0 & \text{si} & t < 0 \\ I(t) & = & I_0 & \text{si} & t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

où I_0 est une constante réelle positive.
La tension u aux bornes du condensateur est une fonction du temps t, deux fois dérivable.
L'intensité i dans la branche AB du circuit est donnée par :

$$i(t) = I_0 - C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \qquad (1)$$

L'équation différentielle donnant la tension u aux bornes du condensateur est :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{LC}u(t) = \frac{RI_0}{LC} \qquad (2)$$

1. Montrer que, dans le cas où $C < \dfrac{4L}{R^2}$ la solution générale de (2) est : (2) Rt

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right] + RI_0$$

   où α et β sont deux constantes réelles et où $\omega = \dfrac{\sqrt{C\left(4L - R^2C\right)}}{2LC}$.

2. Donner la solution particulière de (2) vérifiant les conditions initiales :

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad i(0) = 0.$$

EXERCICE 2 **7 points**

L'objectif de cet exercice est de déterminer le développement en série de Fourier d'une fonction puis d 'utiliser ce développement pour obtenir la somme d 'une série numérique.

On considère la fonction numérique f, périodique de période 2π, impaire, telle que :

$$f(t) = t(\pi - t) \quad \text{pour} \quad t \in [0\,;\,\pi].$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ et dresser le tableau de variations correspondant.

2. Tracer, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ +2\pi]$.

a. Déterminer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n associés à f (on distinguera les deux cas n pair et n impair).

b. On admet que la fonction f vérifie les condition de Dirichlet. Justifier que, pour tout réel t, on a :

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin[(2p+1)t]}{(2p+1)^3}$$

3. On admet que la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$ est convergente.

Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

EXERCICE 3 — 7 points

On produit en grande quantité des tiges. À chaque tige de la production on associe sa longueur x exprimée en millimètres. On définit ainsi une variable aléatoire X. On admet que X suit la loi normale de moyenne 171 et d'écart type 6,2.

1. On prélève, au hasard, une pièce de la production.

a. Calculer la probabilité que la pièce ait une taille inférieur à 160 mm.

b. Calculer la probabilité que la pièce ait une taille supérieure à 195 mm.

2. Déterminer, avec la précision permise par les tables, le réel r tel que :

$$P(|X-171| \leqslant r) = 0,984.$$

Donner la valeur approchée de r à une unité près par excès.

3. Une pièce est jugée défectueuse si sa longueur n'est pas élément de l'intervalle $[156\,;\,186]$.

a. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit défectueuse.

b. On prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de 20 tiges dans la production. On désigne par Y la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de tiges défectueuses d'un tel échantillon.

Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ?

Calculer à 10^{-3} près, la probabilité que sur 20 tiges prélevées, au plus 2 soient défectueuses.