Corrigé du BTS, groupement A, Nouvelle-Calédonie, novembre 2008

EXERCICE 1 – séries de FOURIER

$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha < t < \pi - \alpha \\ -1 & \text{si } \pi - \alpha \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$ avec $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ et f paire et périodique de période 2π.

1. *Représentation de f sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$ lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$*

   Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ on a $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3} \\ -1 & \text{si } \frac{2\pi}{3} - \alpha \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$.

2. a. *Calcul de a_0*

   D'après le formulaire $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ et comme f est paire, $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$, d'où :

   $$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\alpha} 1\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} 0\,\mathrm{d}t + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (-1)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\pi}\,[\alpha - 0 - (\pi - (\pi - \alpha))] = \frac{1}{\pi}(\alpha - \pi + \pi - \alpha) = 0.$$

   b. *Valeur de b_n pour tout entier $n \geqslant 1$*

   D'après le formulaire $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

   Comme f est paire, $t \longmapsto f(t)\sin(nt)$ est impaire donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$, d'où, pour tout entier $n \geqslant 1$, $b_n = 0$.

   c. *Calcul de a_n pour tout entier $n \geqslant 1$*

   D'après le formulaire $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et comme f est paire, $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ est également paire donc $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$. On a :

   $$\begin{aligned}\frac{\pi a_n}{2} &= \int_0^{\alpha} 1\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} 0\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (-1)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\alpha} + 0 - \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{\pi-\alpha}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n}(\sin(n\alpha) - \sin 0) - \frac{1}{n}(\sin(n\pi) - \sin(n\pi - n\alpha)) \\ &= \frac{1}{n}(\sin(n\alpha) + \sin(n\pi - n\alpha)).\end{aligned}$$

   Or $\sin(n\pi - n\alpha) = \sin(n\pi)\cos(n\alpha) - \cos(n\pi)\sin(n\alpha) = -(-1)^n\sin(n\alpha)$ donc, pout tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{\pi a_n}{2} = \dfrac{1}{n}\,[\sin(n\alpha) - (-1)^n\sin(n\alpha))$, soit $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\,[1 - (-1)^n]\sin(n\alpha)$.

3. *Valeur α_0 de α pour laquelle $a_3 = 0$*

   $a_3 = \dfrac{2}{3\pi}\left[1 - (-1)^3\right]\sin(3\alpha) = \dfrac{4}{3\pi}\sin(3\alpha)$.

   $a_3 = 0$ si et seulement si $3\alpha = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ d'où $\alpha = \dfrac{k\pi}{3}$, comme $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ on a $k = 1$ donc $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

4. a. *Calcul de F^2*

$$\begin{aligned}
F^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t \text{ car } f^2 \text{ est paire puisque } f \text{ l'est également,}\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1^2\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 0^2\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (-1)^2\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}t + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{3}-0\right)+\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) \text{ donc } F^2 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

b. *Calcul de $g(t)$*

$g(t) = a_0 + a_1\cos(t) + b_1\sin(t) + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Or $a_0 = b_1 = b_2 = 0$, $a_1 = \dfrac{2}{1\times\pi}\left[1-(-1)^1\right]\sin\left(1\times\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{4}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}$ et

$a_2 = \dfrac{2}{2\times\pi}\left[1-(-1)^2\right]\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}\cos(t)$.

c. *Calcul de G^2*

g est périodique de période 2π, d'où :

$$\begin{aligned}
G^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} g^2(t)\,\mathrm{d}t \text{ car } g^2 \text{ est paire puisque } g \text{ l'est également,}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\cos(t)\right)^2\mathrm{d}t\\
&= \frac{12}{\pi^3}\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{12}{\pi^3}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{6}{\pi^3}\int_0^{\pi}[1+\cos(2t)]\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{6}{\pi^3}\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{6}{\pi^3}\times\pi \text{ donc } G^2 = \frac{6}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

d. *Calcul de $\dfrac{G^2}{F^2}$*

$\dfrac{G^2}{F^2} = \dfrac{\frac{6}{\pi^2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{9}{\pi^2} = 0{,}912$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 – équations différentielles et transformation de LAPLACE

Partie A – résolution de (E_1) : $y''(t) + 4y(t) = 8$

1. a. *Solution particulière constante de* (E_1)

   La fonction $x \longmapsto \varphi(t) = k$ (avec k une constante réelle) est solution de (E_1) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi''(t) + 4\varphi(t) = 8$ soit $4k = 8$ donc $k = 2$.

   Une solution particulière constante de (E_1) est la fonction $t \longmapsto \varphi(t) = 2$.

   b. *Solution générale de* (E_1)

   La solution générale de l'équation sans second membre $y''(t) + 4y(t) = 0$ est la fonction $t \longmapsto A\cos(2t) + B\sin(2t)$, avec A et B deux constantes réelles car l'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ qui a pour solutions $2i$ et $-2i$.

   La solution générale de (E_1) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de (E_1), donc la solution générale de (E_1) est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = 2 + A\cos(2t) + B\sin(2t)$, A et B étant deux constantes réelles.

2. a. *Solution f de (E_1) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$*

   f est solution de (E_1) donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 2 + A\cos(2t) + B\sin(2t)$.

   $f(0) = 0$ si et seulement si $2 + A = 0$ soit $A = -2$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$.

   $f'(0) = 0$ si et seulement si $2B = 0$ soit $B = 0$.

   Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 2 - 2\cos(2t) = 2\,[1 - \cos(2t)]$.

   b. *Période, minimum et maximum de f*

   La pulsation de f est $\omega = 2$ donc sa période est $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(2t) \leqslant 1$ d'où, $-1 \leqslant -\cos(2t) \leqslant 1$, soit $0 \leqslant 1 - \cos(2t) \leqslant 2$, donc $0 \leqslant f(t) \leqslant 4$. La fonction f a donc pour minimum 0 et pour maximum 4.

   Le minimum est atteint en $0 \pmod{\pi}$ et le maximum est atteint en $\dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Partie B – résolution de (E_2) : $g''(t) + 4g(t) = 8\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{U}(t - \pi) - \mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\right]$

1. a. *Représentation sur* $[0\,;\,2\pi]$ *de* $t \longmapsto e(t) = 8\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{U}(t - \pi) - \mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\right]$

   On obtient facilement $e(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} \leqslant t < \pi \text{ ou } t > \dfrac{3\pi}{2} \\ 8 \text{ si } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \leqslant t < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$.

   b. *Calcul de* $\mathcal{E}(p)$

   Pour tout $p > 0$, $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \dfrac{1}{p}$, $\mathcal{L}\left(\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{p}e^{-\frac{\pi p}{2}}$, $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t - \pi)) = \dfrac{1}{p}e^{-\pi p}$ et $\mathcal{L}\left(\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{p}e^{-\frac{3\pi p}{2}}$.

   D'après la linéarité de la transformation de LAPLACE, $\mathcal{E}(p) = \dfrac{8}{p}\left[1 - e^{-\frac{\pi p}{2}} + e^{-\pi p} - e^{-\frac{3\pi p}{2}}\right]$.

2. a. *Calcul de* $G(p)$

   $\mathcal{L}\left(g''(t)\right) = p^2G(p) - pg(0) - g'(0) = p^2G(p)$ car $g(0) = g'(0) = 0$.

   $\mathcal{L}\left(g''(t) + 4g(t)\right) = p^2G(p) + 4G(p) = \left(p^2 + 4\right)G(p)$, d'après la linéarité.

   Or, $g''(t) + 4g(t) = e(t)$ donc $\left(p^2 + 4\right)G(p) = \mathcal{E}(p)$ soit $G(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4}\mathcal{E}(p)$.

   Finalement, pour tout $p > 0$, $G(p) = \dfrac{8}{p\left(p^2 + 4\right)}\left[1 - e^{-\frac{\pi p}{2}} + e^{-\pi p} - e^{-\frac{3\pi p}{2}}\right]$.

   b. *Transformée de* LAPLACE *H de h*

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = 2\,[1 - \cos(2t)]\,\mathcal{U}(t) = 2\mathcal{U}(t) - 2\cos(2t)\mathcal{U}(t)$. En utilisant la linéarité :

$$H(p) = \frac{2}{p} - 2 \times \frac{p}{p^2 + 2^2} = \frac{2\left(p^2 + 4\right) - 2p^2}{p\left(p^2 + 4\right)}, \text{ donc, pour tout } p > 0,\ H(p) = \frac{8}{p\left(p^2 + 4\right)}.$$

c. *Expression de g*

Pour tout $p > 0$:

$$G(p) = H(p) \times \left[1 - e^{-\frac{\pi p}{2}} + e^{-\pi p} - e^{-\frac{3\pi p}{2}}\right] = H(p) - H(p)e^{-\frac{\pi p}{2}} + H(p)e^{-\pi p} - H(p)e^{-\frac{3\pi p}{2}},$$

donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = h(t) - h\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) + h(t-\pi) - h\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

3. a. *Expressions de $g(t)$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left[\pi\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right[$*

Pour tout $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $h(t) = 2\,[1-\cos(2t)]$ et $h\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) = h(t-\pi) = h\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Donc, pour tout $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(t) = 2\,[1-\cos(2t)]$.

Pour tout $t \in \left[\pi\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, $h(t) = 2\,[1-\cos(2t)]$, $h\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) = 2\,[1-\cos(2t-\pi)] = 2\,[1+\cos(2t)]$, $h(t-\pi) = 2\,[1-\cos(2t-2\pi)] = 2\,[1-\cos(2t)]$ et $h\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Donc, pour tout $t \in \left[\pi\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right[$:

$$g(t) = 2\,[1-\cos(2t)] - 2\,[1+\cos(2t)] + 2\,[1-\cos(2t)] = 2 - 2\cos(2t) - 2 - 2\cos(2t) + 2 - 2\cos(2t).$$

Finalement, pour tout $t \in \left[\pi\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, $g(t) = 2 - 6\cos(2t)$.

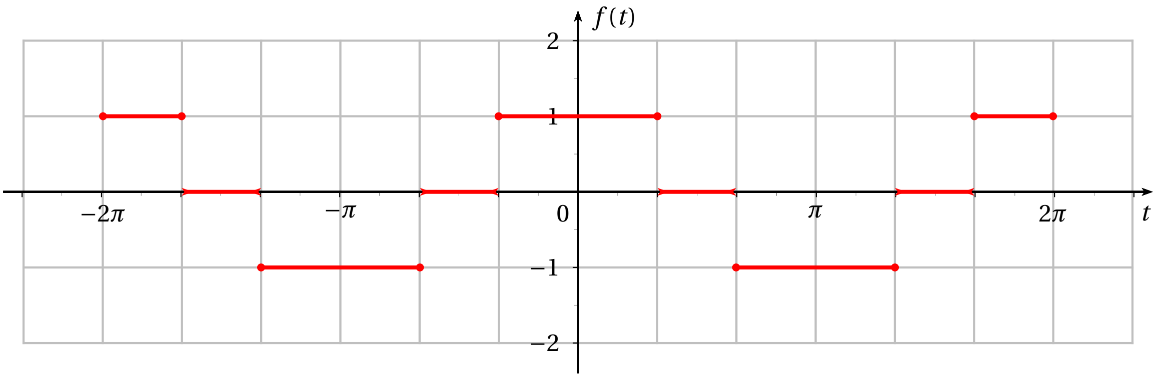
On peut donc écrire :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2 - 2\cos(2t) & \text{si } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \\ -4\cos(2t) & \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant t < \pi \\ 2 - 8\cos(2t) & \text{si } \pi \leqslant t < \dfrac{3\pi}{2} \\ -8\cos(2t) & \text{si } t \geqslant \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

Représentations graphiques

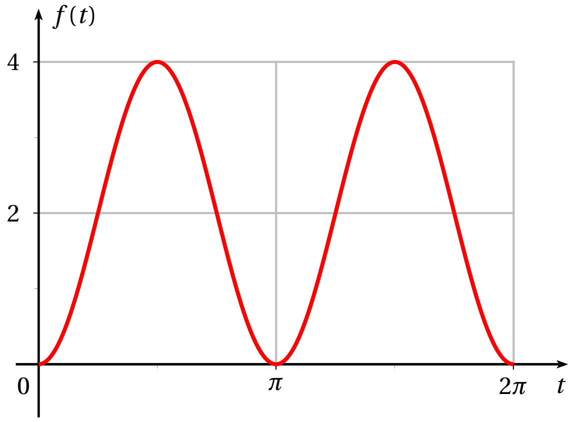
EXERCICE 1

Représentation de f sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$

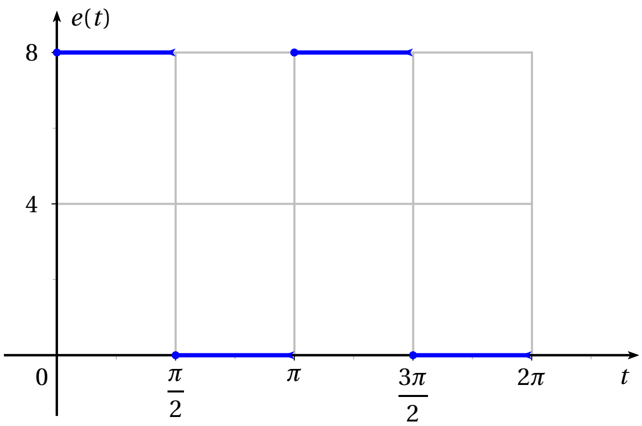


EXERCICE 2

Partie A – représentation de f sur $[0\ ;\ 2\pi]$



Partie B – représentation de e sur $[0\ ;\ 2\pi]$



Partie B – représentation de g sur $\left[0\ ;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$