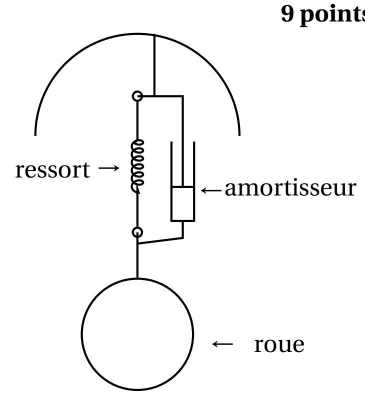
Brevet de technicien supérieur mai 2015 Groupement C

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1 **9 points**

Une étude est menée concernant la suspension de véhicules. On considère que la suspension d'un véhicule est constituée, au niveau de chaque roue, d'un ressort et d'un amortisseur (voir figure). Pour un véhicule donné, le déplacement vertical des suspensions, en cas de sollicitation, dépend du coefficient d'amortissement λ.



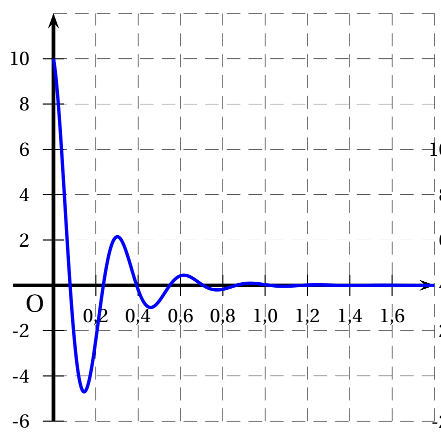
En laboratoire, on étudie le comportement de différents véhicules quand on les écarte de leur position d'équilibre. Le chronomètre est déclenché au moment où le ressort est étiré de 10 cm.

Partie 1 : Différents cas d'amortisseurs

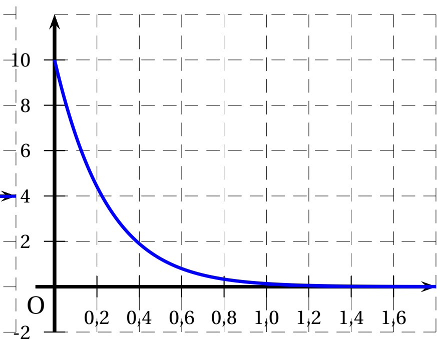
1. Comparaison de deux amortisseurs

   On modélise le déplacement vertical du centre d'inertie du véhicule par rapport à sa position d'équilibre (exprimé en centimètre), en fonction du temps (exprimé en seconde) par la fonction f dont la représentation graphique dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous, pour deux valeurs différentes λ_1 et λ_2 du coefficient d'amortissement.

   Lorsque t représente un temps exprimé en seconde, $f(t)$ représente le déplacement vertical du centre d'inertie à l'instant t.



Courbe C_1 avec le coefficient d'amortissement λ_1



Courbe C_2 avec le coefficient d'amortissement λ_2

   a. Dans chacun des deux cas, décrire le comportement du véhicule à l'aide du graphique.

   b. Quel coefficient d'amortissement est-il plus intéressant d'avoir ? Expliquer.

2. Dans cette question, on s'intéresse à un autre amortisseur. Pour la valeur du coefficient d'amortissement qui lui correspond, le véhicule est ramené à sa

position d'équilibre en un temps minimum et sans oscillation. On parle alors d'amortissement critique. On admet que la fonction donnant le déplacement vertical du centre d'inertie du véhicule par rapport à sa position d'équilibre, en fonction du temps, est alors solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 40y' + 400y = 0.$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 40y' + 400y = 0$.
On rappelle les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
$ay'' + by' + cy = 0$ Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

b. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie $f(0) = 10$ et $f'(0) = 0$.

Partie 2 : Étude dans le cas d'un amortissement critique

On considère la fonction f dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, définie par :

$$f(t) = (200t + 10)e^{-20t}$$

dont la courbe représentative C_f dans un repère orthogonal est donnée en annexe 1.

1. Par lecture graphique, déterminer les variations de f ainsi que les coefficients directeurs des tangentes à la courbe aux points d'abscisses respectives 0 et 0,4.

2. **a.** Démontrer que pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$ on a $f'(t) = -4\,000te^{-20t}$.

b. Indiquer, en justifiant, si les trois résultats obtenus graphiquement à la question 1. sont confirmés.

3. On admet que cette fonction f est celle qui donne le déplacement vertical par rapport à sa position d'équilibre, en centimètre, du centre d'inertie du véhicule équipé de l'amortisseur étudié à la question 2. Partie 1, en fonction du temps, exprimé en seconde.
Déterminer graphiquement au bout de combien de temps le déplacement vertical du centre d'inertie du véhicule par rapport à sa position d'équilibre sera inférieure au dixième du déplacement initial.

4. On donne ci-dessous une copie d'écran obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

1	integrer$((200*t+10)*\exp(-20*t), t)$
	$\dfrac{(-4000*t-400)*\exp(-20*t)}{400}$
2	simplifier$(((-4000*t-400)*\exp(-20*t))/400)$
	$-10*t*\exp(-20*t)-\exp(-20*t)$
3	factoriser$(-10*t*\exp(-20*t)-\exp(-20*t)$
	$(-\exp(-20*t))*(10*t+1)$

a. Que représente la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -(10t+1)\mathrm{e}^{-20t}$ relativement à la fonction f ?

b. En déduire le déplacement moyen du centre d'inertie du véhicule entre les instants $t = 0$ s et $t = 0,4$ s.
On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur le segment $[a\,;\,b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 **11 points**

Dans une société italienne de fabrication de carrelage, on effectue différents types de tests de contrôle de qualité afin de vérifier si le carrelage fabriqué est conforme aux normes en vigueur.

Partie 1

À l'issue de tests, la société estime qu'il y a 3 % de carreaux défectueux dans la production. Soit X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 carreaux prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de carreaux défectueux. La production étant importante, on peut assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. On prélève un lot de 100 carreaux. Déterminer la probabilité qu'il y ait :
   a. Deux carreaux défectueux dans un lot.
   b. Au plus huit carreaux défectueux dans un lot.

Partie 2

Un lot de carreaux de la société italienne est livré chez un fournisseur. À l'arrivée, celui-ci constate que certains carreaux présentent des défauts qui peuvent être de deux types :

— premier type de défaut : le carreau a un défaut de fabrication,
— deuxième type de défaut : le carreau a subi des dommages pendant le transport.

Une étude statistique a permis d'établir que dans le lot livré, il y a 5 % de carreaux qui ont subi des dommages lors du transport et parmi ceux-ci 20 % présentent un défaut de fabrication.
Soit T l'évènement : « le carreau a subi des dommages pendant le transport »,
F l'évènement : « le carreau a un défaut de fabrication ».
Calculer la probabilité qu'un carreau prélevé dans le lot livré ne présente aucun défaut.
On rappelle que 3 % des carreaux produits dans la société italienne ont un défaut de fabrication.

Partie 3

La norme DIN 51 130 permet d'évaluer le caractère antidérapant d'un sol.
Après des tests préliminaires servant d'étalonnage, une personne chaussée de chaussures normalisées marche en avant puis en arrière sur un plan incliné recouvert du sol à tester. Le plan est recouvert d'huile et progressivement incliné jusqu'à ce que la personne glisse. Cette méthode détermine ainsi l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement du revêtement.
La société italienne effectue une série de tests sur les carreaux qu'elle produit, dont celui concernant la résistance au glissement. On désigne par G la variable aléatoire qui, à tout carreau prélevé au hasard dans la production, associe l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement selon la norme DIN 51 130.
On admet que G suit une loi normale d'espérance m et d'écart type σ.

1. Dans cette question, on suppose que $m = 14,5$ et $\sigma = 2$. Un carreau est classé R_{10} si l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise sa résistance au glissement selon la norme DIN 51 130 est compris entre 10 et 19 degrés.

Calculer la probabilité qu'un carreau prélevé au hasard dans la production soit conforme à la classification R_{10}.

2. Dans cette question, on suppose que $m = 14,5$ et on cherche à déterminer σ.

Déterminer la valeur arrondie à 10^{-1} près de σ telle que $P(10 \leqslant G \leqslant 19) = 0,99$.

3. La société italienne réalise dorénavant un nouveau type de finition sur le carrelage pour lequel elle pense que l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement sera supérieur à 14,5 °. Elle décide de réaliser un test afin de vérifier la véracité de cette amélioration de la résistance au glissement.

Pour cela, un test unilatéral de validité d'hypothèse est élaboré, destiné à savoir si l'on peut considérer au seuil de 3 % que l'angle moyen d'inclinaison maximale sur la nouvelle production de carrelage est strictement supérieur à 14,5 °.

Soit $\overline{G}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 carrelages de la production, associe la valeur moyenne de l'angle d'inclinaison maximale lors du test. On admet que $\overline{G}$ suit une loi normale d'espérance m et d'écart type $\sigma = 0,2$.

On choisit l'hypothèse alternative H_1 : « $m > 14,5$ ».

a. Donner l'hypothèse nulle H_0.

b. Sous cette hypothèse nulle, on obtient avec un tableur, les résultats donnés en annexe 2.

Déterminer approximativement la valeur de a tel que $P\left(\overline{G} \leqslant a\right) = 0,97$.

c. Énoncer la règle de décision de ce test.

d. Lors d'un test effectué sur un prélèvement de 100 carreaux dans la production, on obtient les angles d'inclinaison maximale suivants :

Angle d'inclinaison maximale (en degrés)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectifs	2	3	5	14	20	21	15	15	5

Peut-on estimer, au seuil de 3 %, que la nouvelle finition améliore l'angle d'inclinaison maximale ?

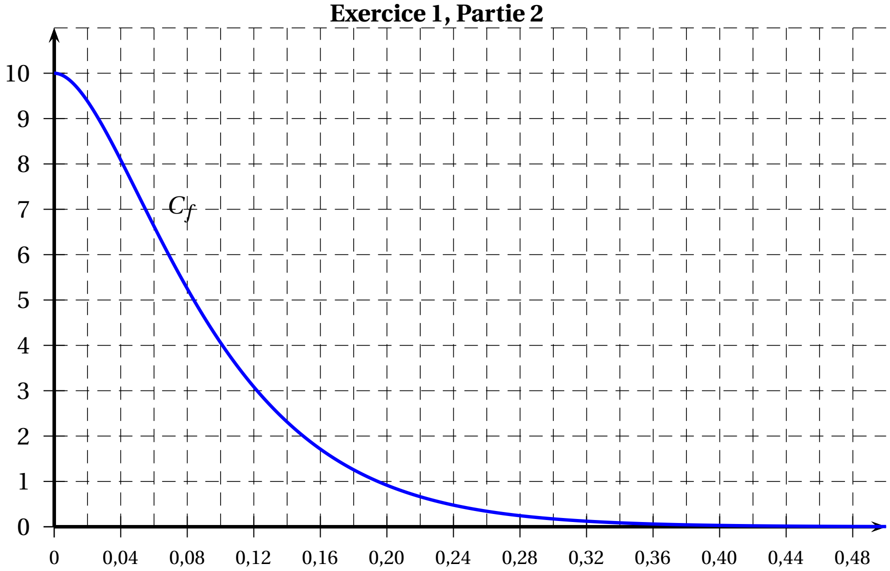
e. Des observations futures prouveront qu'en fait, pour les échantillons de 100 carreaux produits selon le nouveau procédé de finition, la variable $\overline{G}$ suit une loi normale d'espérance $m = 15$ et d'écart-type $\sigma = 0,2$.

Dans ces conditions, on obtient : $P\left(\overline{G} < 14,88\right) \approx 0,27$.

Interpréter ce résultat.

Annexe 1 :

Exercice 1, Partie 2



Annexe 2 :

Exercice 2, Partie 3 question 3. b.

B2		=LOI.NORMALE(A2 ;14,5 ;0,2 ;1)			
	A	B	C	D	E
1	x	$P(X \leqslant x)$			
2	14,75	0,894 35			
3	14,76	0,903 20			
4	14,77	0,911 49			
5	14,78	0,919 24			
6	14,79	0,926 47			
7	14,80	0,933 19			
8	14,81	0,939 43			
9	14,82	0,945 20			
10	14,83	0,950 53			
11	14,84	0,955 43			
12	14,85	0,959 94			
13	14,86	0,964 07			
14	14,87	0,967 84			
15	14,88	0,971 28			
16	14,89	0,974 41			
17	14,90	0,977 25			
18	14,91	0,979 82			
19	14,92	0,982 14			
20	14,93	0,984 22			
21	14,94	0,986 10			
22	14,95	0,987 78			
23	14,96	0,989 28			
24	14,97	0,990 61			
25					