BTS Groupement A Métropole mai 2000

EXERCICE 1 **8 points**

Les objectifs de cet exercice sont d'obtenir le développement en série de Fourier d 'une fonction puis d'utiliser ce développement pour obtenir les sommes de deux séries numériques.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période π, telle que :

$$f(t) = \frac{\pi}{2}t \quad \text{si } t \text{ appartient à l'intervalle } \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier réels associés à la fonction f.
   On précisera la valeur de a_n suivant la parité de l'entier non nul n.
3. **a.** Montrer que la fonction f vérifie les conditions d'application du théorème de Dirichlet.

   b. Soit $S(t) = \dfrac{\pi^2}{8} - \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \cos[2(2p+1)t]$.

   Donner, en la justifiant, la valeur de $S(t)$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.
4. Soient les séries numériques, convergentes, de terme général

$$u_p = \frac{1}{(2p+1)^2} \quad \text{et} \quad v_p = \frac{1}{(2p+1)^4} \quad (p \in \mathbb{N})$$

   a. En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction f déterminer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

   b. On rappelle la formule de Parseval : $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

   En utilisant cette formule, déterminer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

EXERCICE 2 **12 points**

Un système physique est régi par l'équation différentielle suivante dans laquelle les nombres R et C sont des constantes strictement positives.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) \qquad (E_1)$$

Partie 1

Dans cette partie on suppose que la fonction f est définie pour tout t réel par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) & = & 0 \quad \text{pour } t < 0 \\ f(t) & = & V_0 \quad \text{pour } t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

où V_0est une constante réelle strictement positive.

1. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$ pour t appartenant à $]-\infty\ ;\ 0[$ puis résoudre sur $]-\infty\ ;\ 0[$ l'équation différentielle (E_1). avec la condition $v\left(0^-\right) = \displaystyle\lim_{t \to 0^-} v(t) = 0$.
2. Calculer v pour t appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ puis résoudre sur $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle (E_1) avec la condition $v\left(0^+\right) = \displaystyle\lim_{t \to 0^+} v(t) = V_0$.
3. Étudier sur $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ les variations de la fonction v.
   Donner dans un repère orthonormal, l'allure de la représentation graphique de la fonction v pour t réel non nul. On prendra, pour réaliser le graphique, $RC = 1$ et $V_0 = 2$.

Partie 2

La fonction échelon unité apparaissant dans cette partie est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{U}(t) & = & 0 & \text{pour } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) & = & 1 & \text{pour } t \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Dans cette partie on suppose que la fonction f est définie pour tout t réel par

$$f(t) = V_0[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\tau)]$$

où τ est un réel strictement positif.
Le système est alors régi par l'équation :

$$v(t) + \frac{1}{RC}\int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u = f(t) \qquad (E_2)$$

1. Donner dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f (on prendra, pour réaliser le graphique $V_0 = 2$ et $t = 1$).
   Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f.
2. On suppose que la fonction v est nulle pour $t < 0$, et qu'elle admet une transformée de Laplace notée pHV(p) .
   a. Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, l'équation (E_2).
   b. En déduire que la fonction v est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} v(t) & = & 0 & \text{pour } t < 0 \\ v(t) & = & V_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} & \text{pour } 0 \leqslant t < \tau \\ v(t) & = & V_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) & \text{pour } t \geqslant \tau \end{array}\right.$$

3. Dans cette question, on s'intéresse à la représentation graphique de la fonction v.
   a. Calculer $v\left(\tau^-\right)$ définie par $v\left(\tau^-\right) = \displaystyle\lim_{t \to \tau^-} v(t)$ et montrer que $v\left(\tau^-\right) < V_0$.
   b. Montrer que le « saut » σ de la fonction v en $t = \tau$ défini par
   $\sigma = v\left(\tau^-\right) - v(\tau)$, est égal à V_0.
   c. Étudier les variations de la fonction v pour $t \geqslant \tau$.
   d. En utilisant les résultats précédents et ceux de la partie I, question 3, donner l'allure de la représentation graphique de la fonction v dans un repère orthogonal.
   On prendra, pour réaliser le graphique, $RC = 1$, $V_0 = 2$ et $\tau = 1$.