Brevet de technicien supérieur session 2007
Groupement A–Métropole

Exercice 1 **12 points**

On s'intéresse à un système entrée-sortie susceptible d'être contrôlé.
Dans la partie A, on étudie le système en l'absence de contrôle.
Dans la partie B, on étudie le système soumis à un contrôle.
Les parties A, B et C sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 10 - \beta \quad (E_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t et β une constante réelle.

1. Montrer que la fonction h définie pour tout nombre réel t par $h(t) = 10 - \beta$ est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_1).
3. Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0) = 10$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \beta \mathrm{e}^{-2t} + 10 - \beta$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$ que l'on note f_∞.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

et qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle pour tout nombre réel strictement négatif.

On considère la fonction causale g qui vérifie la relation (E_2) suivante :

$$\frac{1}{2}g'(t) + g(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,\mathrm{d}u + (10 - \beta)U(t) \quad (E_2)$$

et la condition $g(0) = 10$.

On admet que la fonction g admet une transformée de Laplace notée G.

1. Montrer que la transformée de Laplace I de la fonction i définie par :

$$i(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,\mathrm{d}u$$

est telle que

$$I(p) = \frac{130}{p^2} - 13\frac{G(p)}{p}.$$

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de la relation (E_2), déterminer une expression de $G(p)$.
3. Vérifier que $G(p) = \dfrac{10}{p} - \dfrac{2\beta}{(p+1)^2 + 5^2}$.

4. Dans cette question, on va déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$, que l'on note g_{∞} et qui est la valeur finale du signal représenté par la fonction g.
On rappelle que, d'après le théorème de la valeur finale, $g_{\infty} = \lim\limits_{p \to 0^+} pG(p)$.

Déterminer g_{∞}.

5. **a.** Déterminer la transformée de Laplace de la fonction qui à tout nombre réel t associe $\text{e}^{-t}\sin(5t)U(t)$.

b. En déduire l'expression de $g(t)$.

Partie C

Dans cette partie, on prend $\beta = 5$.

En **annexe 1, à rendre avec la copie**, on a représenté, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g définies dans les parties A et B avec $\beta = 5$.
On admet ici que pour tout nombre réel t positif ou nul :
$f(t) = 5\text{e}^{-2t} + 5$ et $g(t) = 10 - 2\text{e}^{-t}\sin(5t)$.
On rappelle que f_{∞} et g_{∞} sont les limites respectives des fonctions f et g en $+\infty$.
On a donc : $f_{\infty} = 5$ et $g_{\infty} = 10$.

1. **a.** Vérifier que pour tout nombre réel t positif ou nul on a : $\dfrac{f(t) - f_{\infty}}{f_{\infty}} = \text{e}^{-2t}$.

b. Soit t_1 le nombre réel tel que :

$$\frac{f(t) - f_{\infty}}{f_{\infty}} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geqslant t_1.$$

Calculer la valeur exacte de t_1, puis une valeur approchée de t_1 arrondie au dixième.

2. Soit t_2 le nombre réel tel que :

$$-0,02 \leqslant \frac{g(t) - g_{\infty}}{g_{\infty}} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geqslant t_2.$$

Graphiquement, déterminer une valeur approchée de t_2, arrondie au dixième.

Dans ce problème, on a étudié un système entrée-sortie, dans la partie A libre de tout asservissement, puis dans la partie B contrôlé par une commande intégrale.
On a montré que grâce à cette commande on peut stabiliser la sortie à la valeur 10 indépendamment de la perturbation β, au prix d'une détérioration du temps de réponse du système et de l'apparition d'oscillations amorties.

Exercice 2 **8 points**

On désigne par j le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère un filtre dont la fonction de transfert T est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$T(\omega) = \frac{-\text{j}\omega k}{1 - \text{j}\dfrac{\omega}{2}}.$$

Le nombre k est un nombre réel strictement positif compris entre 0 et 1.
En associant trois filtres identiques au précédent, on obtient un système dont la fonction de transfert H est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$H(\omega) = (T(\omega))^3.$$

1. On note $r(\omega)$ le module de $H(\omega)$.
On a donc : $r(\omega) = |H(\omega)|$.

a. Montrer que le module de $T(\omega)$ est $\dfrac{k\omega}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4}}}$.

b. En déduire $r(\omega)$.

2. a. Justifier qu'un argument de $(-\mathrm{j}\omega)^3$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

Justifier qu'un argument de $1-\mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}$ est $-\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.

En déduire qu'un argument de $H(\omega)$, notée $\varphi(\omega)$, est défini sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

b. On note φ' la dérivée de la fonction φ. Calculer $\varphi'(\omega)$.

Déterminer le signe de φ' sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Déterminer les limites de la fonction φ en 0 et $+\infty$.

3. Dans le tableau ci-après on donne les variations de la fonction r sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Recopier et compléter ce tableau en utilisant les résultats obtenus dans la question 2.

ω	0		$+\infty$
$r'(\omega)$	‖	$+$	
$r(\omega)$	‖	0 ↗	$8k^3$
$\varphi(\omega)$	‖		
$\varphi'(\omega)$	‖		

4. Dans cette dernière question, on se place dans le cas où $k = 0,9$.

Lorsque ω décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, le point d'affixe $H(\omega)$ décrit une courbe $\mathscr{C}$.

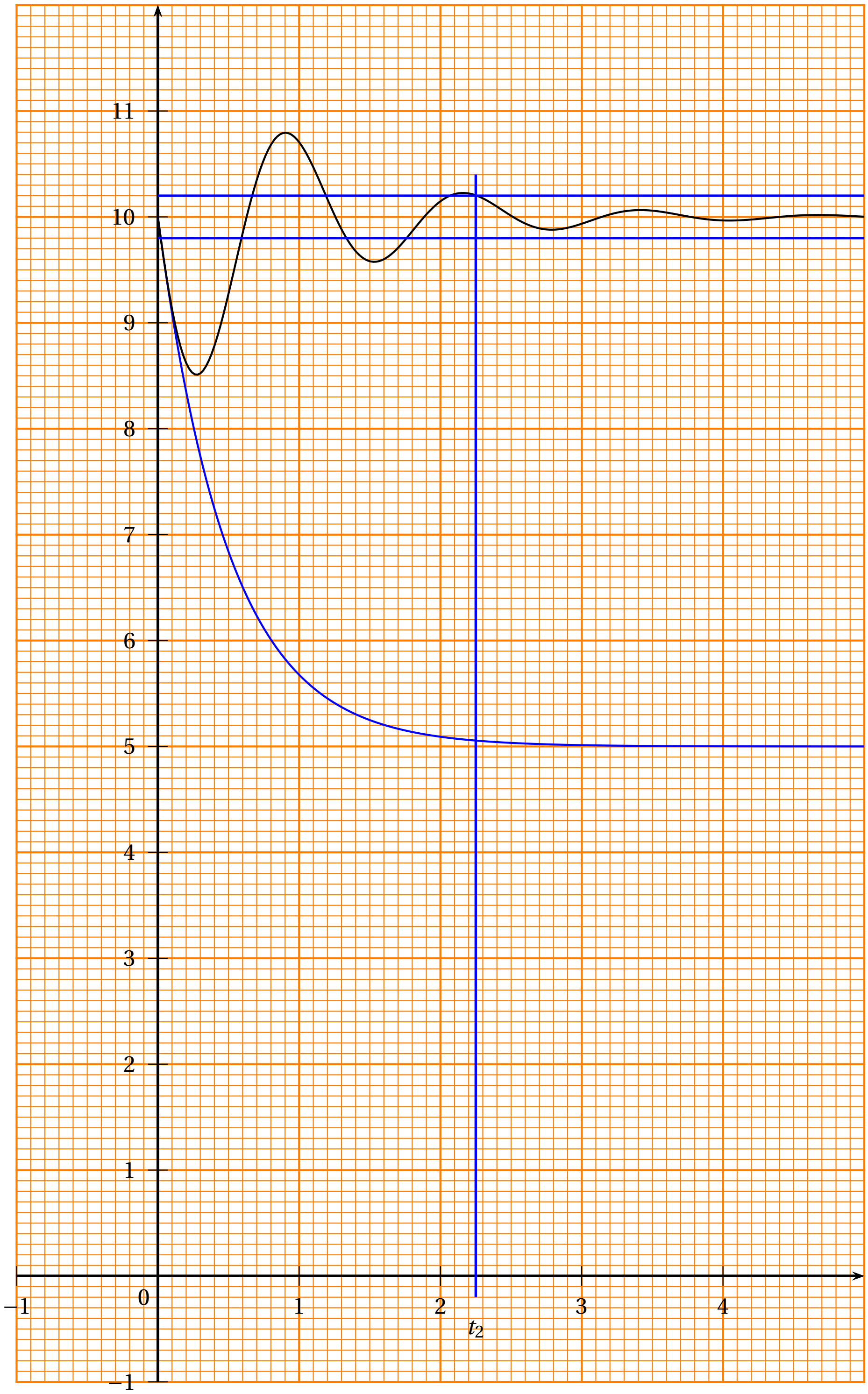
En **annexe 2, à rendre avec la copie,** la courbe $\mathscr{C}$ est tracée dans le plan complexe.

On note ω_0 la valeur de ω pour laquelle le module de $H(\omega)$ est égal à 1.

a. Placer précisément le point M_0 d'affixe $H(\omega_0)$ sur le document réponse donné en **annexe 2.**

b. Calculer une valeur arrondie à 10^{-2} près du nombre ω_0, puis de $\varphi(\omega_0)$.

Annexe 1
Document réponse à rendre avec la copie



Annexe 2
Document réponse à rendre avec la copie