Brevet de technicien supérieur
session 2016 - groupement A2

Exercice 1 **7 points**

Une chaine de traitement de surface est constituée de plusieurs cuves dont l'une est destinée à réaliser le dégraissage de pièces usinées par immersion dans une solution aqueuse (eau et additif détergent).
Pour que le dégraissage s'effectue correctement il faut que la température du bain soit maintenue constante entre 75 *°C et* 85 *°C.*
Un technicien doit réaliser la régulation en température de cette cuve. Pour cela il propose l'installation d'un élément chauffant dont la puissance doit permettre de compenser les pertes thermiques et de réaliser la montée en température en un temps déterminé.

Les caractéristiques du système thermique sont les suivantes :
R : résistance thermique caractérisant les pertes d'énergie thermique. $R = 0,115$ °C.W^{-1}.
k : constante liée à la capacité du système à emmagasiner l'énergie thermique. $k = 34,8$ J. °C^{-1}.
$f(t)$: puissance, en watt, apportée par l'élément chauffant à l'instant t (en seconde).
θ_A : température de l'air ambiant. $\theta_A = 20$ °C.
$\theta_{S(t)}$: température en degré Celsius de la solution aqueuse contenue dans la cuve à l'instant t.
$\theta(t) = \theta_{S(t)} - \theta_A$: écart en degré Celsius entre la température de la solution aqueuse contenue dans la cuve et celle de l'air ambiant à l'instant t.
Une modélisation du système permet d'établir que, pour tout $t \geqslant 0$, la fonction θ vérifie l'égalité :

$$\theta(t) + kR\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) = Rf(t) \qquad (1)$$

On note $T : p \longmapsto T(p)$ et $F : p \longmapsto F(p)$ les transformées de Laplace respectives des fonctions $\theta : t \longmapsto \theta(t)$ et $f : t \longmapsto f(t)$.
On rappelle quelques résultats concernant la transformation de Laplace, formulés en notant
– U la fonction échelon unité définie par : (si $t < 0$, $U(t) = 0$) et (si $t \geqslant 0$, $U(t) = 1$),
– g une fonction ayant une transformée de Laplace G.

Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}U(t)$ avec a constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \longmapsto g(t-a)U(t-a)$ avec a constante réelle	$p \longmapsto G(p)\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{-at}U(t)$ avec a constante réelle	$p \longmapsto G(p+a)$
$t \longmapsto g'(t)U(t)$	$p \longmapsto pG(p) - g\left(0^+\right)$

1. On considère qu'à l'instant $t = 0$, la température de la solution aqueuse contenue dans la cuve est égale à celle de l'air ambiant.
   En appliquant la transformation de Laplace à l'égalité (1) montrer que :

$$T(p) = \frac{0,115}{4,002p+1}F(p).$$

2. On applique une puissance échelon de 522 watts. On a donc : $f(t) = 522U(t)$.
   a. Donner l'expression de $F(p)$.
   b. En déduire l'expression de $T(p)$.
   Par la suite, pour simplifier, on prendra $\boldsymbol{T(p) = \dfrac{60}{p(4p+1)}}$, ce qui s'écrit encore :

$$T(p) = \frac{15}{p(p+0,25)}.$$

3. **a.** Montrer que : $T(p) = \dfrac{60}{p} - \dfrac{60}{p+0,25}$.

b. En déduire que pour tout $t \geqslant 0$: $\theta(t) = 60\left(1 - \text{e}^{-0,25t}\right)$.

4. **a.** Déterminer la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Justifier.
Cette limite est appelée par la suite « valeur finale de θ ».

b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction θ ?

c. Calculer $\theta'(t)$ pour $t \geqslant 0$, puis étudier les variations de la fonction θ.

d. Représenter la fonction θ dans le repère donné sur le document réponse.

5. Le technicien estime que, lorsque $\theta(t)$ a atteint 95 % de sa valeur finale, la température du bain $\theta_S(t)$ peut être considérée comme constante.

a. Déterminer le temps nécessaire pour que $\theta(t)$ atteigne 95 % de sa valeur finale. Expliquer la démarche suivie.

b. Quelle est la température constante autour de laquelle se stabilise la température du bain ?
Le dégraissage sera-t-il réalisé conformément aux conditions décrites dans le préambule ?

Exercice 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

On rappelle que le développement en série de Fourier d'une fonction f périodique de période T est

$$S(t) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

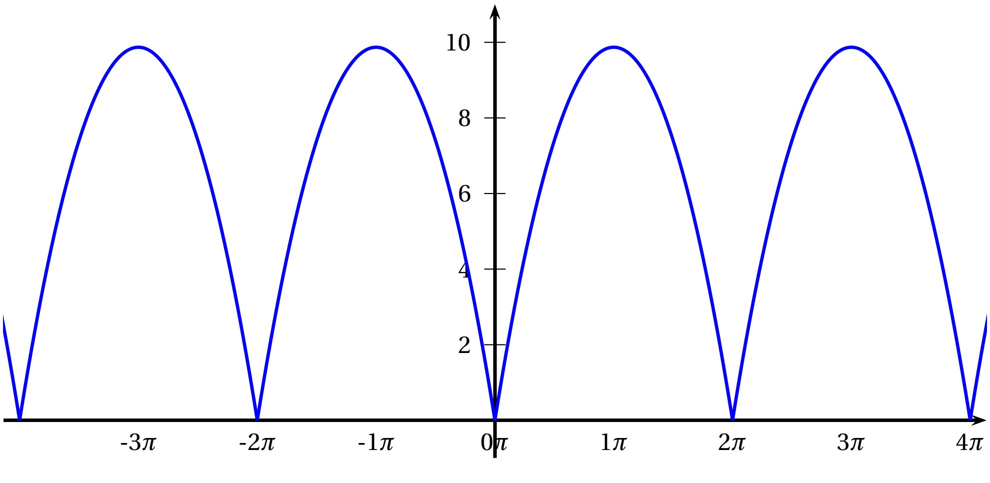
avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\text{d}t$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute constante réelle α :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\text{d}t \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\text{d}t.$$

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes

Partie A

On donne ci-dessous la représentation graphique C d'une fonction f définie pour tout réel x, paire, périodique de période T et telle que pour tout $x \in [0\,;\,2\pi]$: $f(x) = x(2\pi - x)$.



On souhaite déterminer les coefficients a_0, a_n et b_n, avec $n \geqslant 1$, de la série de Fourier associée à cette fonction f.

1. Déterminer T puis calculer ω.

2. Calculer le coefficient a_0.

3. Que valent les coefficients a_n et b_n pour $n \geqslant 1$?
On pourra utiliser les résultats ci-dessous obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

integrate(x*(2pi-x)*cos(n*x),x,0,2*pi) $= \dfrac{-2n\pi\cos(n*2\pi)+2\sin(n*2\pi)}{n^3} - \dfrac{2\pi}{n^2}$
integrate(x*(2pi-x)*sin(n*x),x,0,2*pi) $= \dfrac{-2*\cos(2*n*\pi)-2*n\pi\sin(2*n*\pi)}{n^3} + \dfrac{2}{n^3}$

On simplifiera le plus possible les réponses.

Partie B

La tension exprimée en volt (V) aux bornes d'une bobine de moteur pas à pas dépend du temps t exprimé en seconde. Elle est modélisée par la fonction u impaire, périodique de période $T = 6$, telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}.$$

1. Dans un repère orthogonal tracer la courbe C représentative de u sur l'intervalle $[-6 ; 6]$.

2. Déterminer la valeur moyenne U_{moy} de cette tension u sur un intervalle de longueur T.

3. La tension efficace U_{eff} vérifie : $U_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer la valeur exacte de U_{eff} puis donner sa valeur arrondie à 10^{-2} près.

Partie C

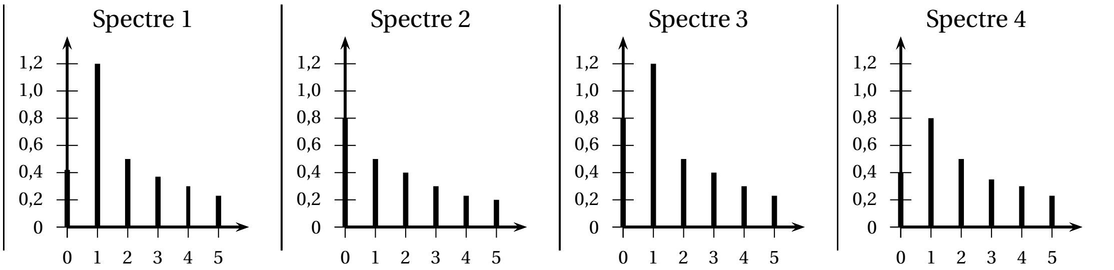
On s'intéresse à une fonction f définie pour tout réel t, périodique de période 2π et développable en série de Fourier. On donne son développement :

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geqslant 1}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)\right] \text{ avec } t \text{ réel quelconque.}$$

1. Quelle est la valeur du coefficient a_0 du développement en série de Fourier de f ?
Exprimer en fonction de n les coefficients a_n et b_n pour n entier supérieur ou égal à 1.

2. Soit $S_N(t) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)\right]$ la somme partielle de rang N (N entier supérieur ou égal à 1) de la série de Fourier.
Écrire $S_2(t)$. On cherchera à simplifier l'expression obtenue.

3. Parmi les spectres d'amplitude ci-dessous quel est celui associé à f ? Expliquer.
On rappelle que $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geqslant 1$ et $A_0 = |a_0|$.



Exercice 3 **6 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

PARTIE A

La société Sun-NRJY fabrique des cellules photovoltaïques qu'elle assemble ensuite pour former des panneaux qui seront installés sur le toit de bâtiments pour produire de l'électricité.
Ces cellules, à base de silicium, sont très fines (environ 250μm) et très fragiles. On estime que 1,5 % des cellules fabriquées présenteront un défaut (fissure, casse, ...) et seront donc inutilisables.
À la sortie de la production, on forme des lots de 75 cellules. La production étant très importante on peut assimiler la constitution d'un lot de 75 cellules à 75 tirages indépendants avec remise.
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 75 cellules le nombre de cellules inutilisables qu'il contient.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un lot ne contienne aucune cellule inutilisable ?
3. Un panneau est constitué de 72 cellules. Quelle est la probabilité d'avoir suffisamment de cellules sans défaut dans un seul lot pour pouvoir fabriquer un panneau ?

PARTIE B

Les 72 cellules utilisées pour constituer un panneau sont ensuite raccordées entre elles (soudures) puis placées sous une vitre de protection et insérées dans un cadre en aluminium. Les panneaux ainsi fabriqués sont alors expédiés chez un installateur.
À la réception des panneaux, l'installateur constate que certains panneaux présentent des défauts qui peuvent être de deux types, des défauts électriques (cellules fissurées, soudures défectueuses, ...), des défauts de structure (cadre abîmé, verre brisé, ...).
Une étude statistique a permis d'établir que 2 % des 500 panneaux reçus par l'installateur avaient un défaut électrique, que 1 % des panneaux avaient un défaut de structure et que parmi les panneaux présentant un défaut de structure, 40 % avaient aussi un défaut électrique.
On choisit au hasard un panneau.

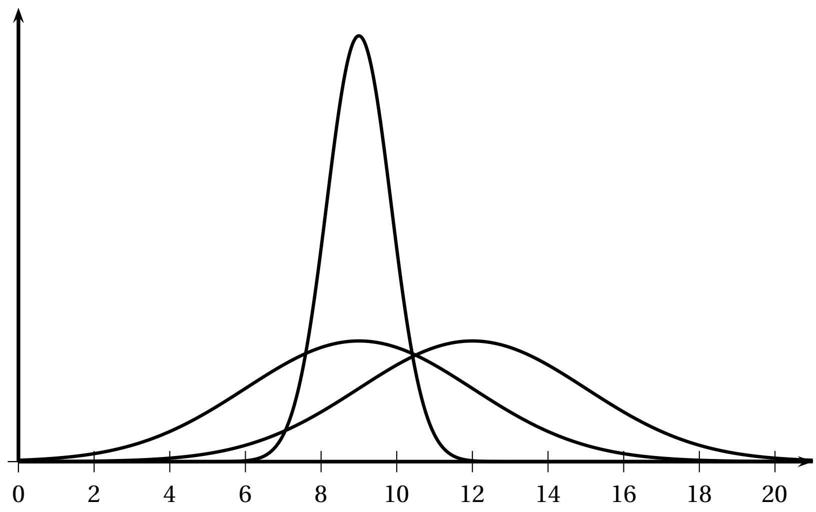
- On appelle E l'évènement : « le panneau présente un défaut électrique ».
- On appelle S l'évènement : « le panneau présente un défaut de structure ».

1. Compléter le tableau d'effectifs du document réponse.
2. Quelle est la probabilité qu'un panneau pris au hasard parmi ceux livrés à l'installateur ne présente aucun défaut ?
3. Les évènements E et S sont-ils indépendants ? Expliquer.

PARTIE C

Dix de ces panneaux sont installés sur le toit d'une maison située dans une région à ensoleillement régulier et produisent de l'électricité.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque journée, associe la production électrique fournie par ces 10 panneaux, exprimée en kWh.
La variable Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 9$ et $\sigma = 3$.

1. Quelle est la probabilité que la production journalière soit comprise entre 6 et 12 kWh ?
2. Parmi les trois fonctions de densités de probabilité représentées ci-dessous, laquelle peut être celle de la loi de Y ? Justifier.



3. Les occupants de la maison consomment en moyenne 10 kWh par jour (hors chauffage et eau chaude).
   a. Quelle est la probabilité que la production journalière des panneaux soit supérieure à la consommation moyenne quotidienne ?
   b. Quelle devrait être la consommation moyenne quotidienne de cette famille, en kWh, pour que cette probabilité soit environ de 90 % ? On arrondira la réponse au dixième.