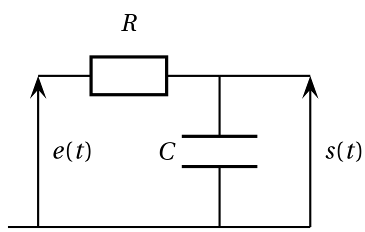
Brevet de technicien supérieur 12 mai 2016 Systèmes numériques

Exercice 1 **8 points**

On considère un filtre analogique de type passe bas du premier ordre utilisé dans de nombreux modules électroniques. Il est constitué d'un résistor ayant une résistance R et d'un condensateur de capacité C.



Les tensions d'entrée et de sortie, exprimées en volt, dépendent du temps t exprimé en seconde.
On les modélise par des fonctions e et s définies sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et qui vérifient :

$$(s(0) = 0) \quad \text{et} \quad (RCs'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{pour tout } t \geqslant 0)$$

On étudie dans l'exercice le cas particulier où $RC = 10^{-2}$ seconde et $e(t) = 1$ pour tout $t \geqslant 0$.
La fonction s est donc la fonction nulle en 0 vérifiant sur $[0~;~+\infty[$ l'équation différentielle :

$$0,01y'(t) + y(t) = 1 \qquad (E)$$

d'inconnue la fonction y, dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et de fonction dérivée y'.

Partie A

On rappelle que la dérivée d'une fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$, où u est une fonction dérivable, vérifie :

$$f'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}.$$

1. Vérifier que la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-100t}$ est la solution sur $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle (E) qui s'annule en zéro.
2. On a donc pour tout t appartenant à $[0~;~+\infty[$: $s(t) = 1 - \mathrm{e}^{-100t}$.
   a. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} s(t)$. Justifier.
   b. Étudier les variations de la fonction s sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   c. Sur le **document réponse 1**, tracer la représentation graphique de la fonctions sur l'intervalle $[0~;~0,20]$.

Partie B

On s'intéresse dans cette partie à un système d'entrée-sortie numérique destiné à approcher le système analogique étudié dans l'exercice.

La tension d'entrée $e(t)$, exprimée en volt, est échantillonnée à la cadence T_e avec $T_e = 10^{-3}$ s.
On obtient ainsi un signal discret causal (a_n) vérifiant pour tout entier $n \geqslant 0$: $a_n = e(nT_e) = 1$.
Par échantillonnage à la cadence T_e de la fonction s et discrétisation de l'équation $RCs'Ct) + s(t) = e(t)$, on définit un signal discret causal (b_n) vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$:

$$RC\frac{b_n - b_{n-1}}{T_e} + b_n = a_n, \text{ soit } 10(b_n - b_{n-1}) + b_n = a_n.$$

1. **a.** Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$: $b_n = \dfrac{1}{11}a_n + \dfrac{10}{11}b_{n-1}$.

   b. Quelle valeur faut-il donner à b_0 pour que la relation $b_n = \dfrac{1}{11}a_n + \dfrac{10}{11}b_{n-1}$ soit valable pour $n = 0$?

2. Désormais, on suppose que pour tout entier $n \geqslant 0$: $b_n = \dfrac{1}{11}a_n + \dfrac{10}{11}b_{n-1}$.
   Reporter dans le tableau du **document réponse 1**, les valeurs de a_n, b_{n-1} et b_n arrondies à 10^{-3} près pour n compris entre 0 et 3.

3. On donne les formules suivantes relatives à la transformation en Z :

Signal causal	**Transformée en Z**
$f(n) = a^n,\ a \in \mathbb{R}*$	$F(z) = \dfrac{z}{z-a}$
$x(n)$	$X(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$
$y(n) = x(n-n_0),\ n_0 \in \mathbb{N}$	$Y(z) = z^{-n_0}X(z)$

   a. On rappelle que le signal causal (a_n) vérifie : $a_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
   Donner la transformée en Z, notée $A(z)$, du signal (a_n).

   b. On admet que le signal (b_n) admet une transformée en Z notée $B(z)$.
   En utilisant l'égalité $b_n = \dfrac{1}{11}a_n + \dfrac{10}{11}b_{n-1}$, valable pour tout entier $n \geqslant 0$, déterminer une expression de $B(z)$ en fonction de z.

   c. Prouver que : $\dfrac{B(z)}{z} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{10}{11z-10}$.

   d. On déduit de la question précédente que : $B(z) = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{10}{11}\dfrac{z}{z - \frac{10}{11}}$.
   Déterminer b_n pour tout entier $n \geqslant 0$.

4. On estime que l'équivalent numérique du filtre analogique est satisfaisant lorsque l'écart relatif entre b_n et $s(nT_e)$, pour $n \geqslant 1$, est strictement inférieur à 1 %, c'est-à-dire lorsque :

$$\left|\frac{b_n}{s(nT_e)} - 1\right| < 0,01.$$

   On rappelle que $T_e = 10^{-3}s$ et que pour tout t appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$:
   $s(t) = 1 - \mathrm{e}^{-100t}$.

   a. Calculer $s(nT_e)$ en fonction de n.

   b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n, $n \geqslant 1$, pour laquelle l'écart relatif entre b_n et $s(nT_e)$ est strictement inférieur à 1 %.

Exercice 2 **6 points**

Une entreprise fabrique un très grand nombre de condensateurs électroniques. Leurs caractéristiques d'utilisation normale sont : une tension nominale en Volt (V) ; une capacité nominale en micro farad (μF) ; une tolérance sur la capacité en pourcentage (%).

Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de **façon indépendante**

On arrondira les probabilités calculées dans chacune d'elles **au millième**.

Partie A

On s'intéresse à un type de condensateur de découplage dans les amplificateurs. Le constructeur indique une capacité C de 22 μF et une tolérance sur la capacité de $\pm 5\,\%$.
Le condensateur est donc considéré comme conforme lorsque sa capacité est comprise entre $0,95 \times 22$ μF et $1,05 \times 22$ μF ,c'est-à-dire entre $20,9$ μF et $23,1$ μF.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque condensateur prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe sa capacité en micro farad (μF).
On admet que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 22$ μF et d'écart-type $\sigma = 0,6$ μF.

1. Calculer la probabilité qu'un condensateur prélevé au hasard soit conforme.
2. **a.** Déterminer la valeur, arrondie au centième, du nombre réel positif h tel que :

$$P(22 - h \leqslant X \leqslant 22 + h) \approx 0,95 \text{ à } 0,01 \text{ près par excès.}$$

   b. Traduire le résultat précédent par une phrase dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On considère à présent que 7 % des condensateurs fabriqués par l'entreprise sont non conformes.
On prélève 50 condensateurs dans la production d'un jour donné. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 condensateurs, associe le nombre de condensateurs non conformes.

1. Donner la loi de la variable aléatoire Y et préciser ses paramètres. On n'attend pas de justifications.
2. Calculer la probabilité qu'un prélèvement contienne un seul condensateur non conforme.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au maximum un condensateur non conforme dans un prélèvement.

Partie C

On rappelle que si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors :

— pour tout nombre réel positif x : $P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$,

— l'espérance de X vaut $\dfrac{1}{\lambda}$ et sa variance vaut $\dfrac{1}{\lambda^2}$.

On considère que la durée D de fonctionnement, en heure, d'un condensateur fabriqué par l'entreprise est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$.

1. Calculer la probabilité qu'un condensateur fonctionne plus de 20 000 heures.

2. Quelle est la durée de fonctionnement moyenne d'un condensateur fabriqué par l'entreprise ?

Exercice 3 **6 points**

On rappelle que la transformée de Fourier discrète (T. F. D.) d'une séquence de nombres complexes $(x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{N-1})$ où N est un entier naturel non nul, est la séquence de nombres complexes $(X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{N-1})$ définie par :

$$X_l = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega^{-kl},\ \text{ pour tout entier } l \text{ compris entre } 0 \text{ et } (N-1) \text{ et avec } \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}}.$$

On considère le signal s périodique de période $T = \dfrac{1}{400}$ défini par :

$$\left(s(t) = 800\pi t \text{ si } -\frac{T}{4} \leqslant t \leqslant \frac{T}{4}\right) \quad \text{et} \quad \left(s(t) = \pi - 800\pi t \text{ si } \frac{T}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3T}{4}\right).$$

1. Représenter le signal s sur l'intervalle $[-T~;~2T]$ dans le repère du document réponse 2 .

2. On échantillonne le signal s tous les $T_e = \dfrac{T}{8}$ sur l'intervalle $[0~;~T[$.

a. Placer sur le cercle trigonométrique donné dans le document réponse 2 le nombre complexe $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{8}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et les nombres complexes ω^n pour les entiers n compris entre -8 et 8.

b. Compléter le tableau du document réponse 2 avec les valeurs des échantillons $x_k = s\left(k\dfrac{T}{8}\right)$ et les formes algébriques des nombres complexes ω^{-k}, pour k compris entre 0 et 7.

c. On note $(X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_7)$ la T. F. D. des échantillons $(x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_7)$ du signal.

Calculer les formes algébriques des nombres complexes X_0 et X_1.

3. À l'aide du programme donné en page suivante on simule l'échantillonnage du signal s à la fréquence $F_e = 20\,000$ Hz pendant une durée de $0,5$ seconde et on s'intéresse à son spectre.

Ce programme est écrit avec un logiciel de calcul vectoriel de type Scilab.

Certaines lignes de commande sont accompagnées de commentaires les explicitant (en italiques après le symbole //). %pi désigne une valeur approchée de la constante mathématique π.

Le calcul des échantillons du signal s est effectué dans les lignes 4 et 5 de ce programme en utilisant la fonction arcsinus, notée asin, qui à tout réel x compris entre -1 et $+1$ associe le réel compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$ dont le sinus est égal à X.

Aucune connaissance sur la fonction arcsinus n'est nécessaire pour comprendre le programme puis traiter les questions posées.

PROGRAMME

Fe=20000 ;	
t= (0 : 1/Fe : 0.5-1/Fe) ;	//le vecteur-ligne t contient les nombres $k\dfrac{1}{F_e}$ appartenant à l'intervalle [0 ; 0,5[.
N=size(t) ;	//N est le nombre de termes du vecteur-ligne t.
u=sin (800*%pi*t) ;	
s=asin(u) ;	//le vecteur-ligne s contient les échantillons du signal associés aux valeurs contenues dans le vecteur-ligne t.
TFs=fft(s) ;	//le vecteur-ligne TFs contient la TFD de la séquence s.
modTFs=abs(TFs) ;	//le vecteur- ligne modTFs contient les modules des termes du vecteur-ligne TFs.
scf(1) ;clf(1) ;	//ouverture de l'écran graphique n° 1 et effacement de son contenu antérieur.
plot(modTFs) ;	//on représente en abscisses les rangs des termes du vecteur-ligne modTFs et en ordonnées les valeurs de ces termes.

On rappelle que la première moitié de la TFD (X_0, X_1, X_2, …, X_{N-1}) des échantillons d'un signal approxime, à un coefficient constant près, le spectre du signal aux fréquences 0, $\dfrac{F_e}{N}$, $\dfrac{2F_e}{N}$,… etc. Plus précisément : $|X_l| \approx \dfrac{N}{2} \times A_l$ où A_l est l'amplitude de la composante de fréquence $\dfrac{lF_e}{N}$ du signal.

a. N est le nombre d'échantillons du signal. On rappelle que l'échantillonnage est réalisé à la fréquence $F_e = 20\,000$Hz pendant une durée de 0,5 seconde. Que vaut N ?

b. On a exécuté le programme ci-dessus et obtenu la **représentation graphique 1** donnée à la fin puis, en zoomant sur celle-ci, la **représentation graphique 2**.

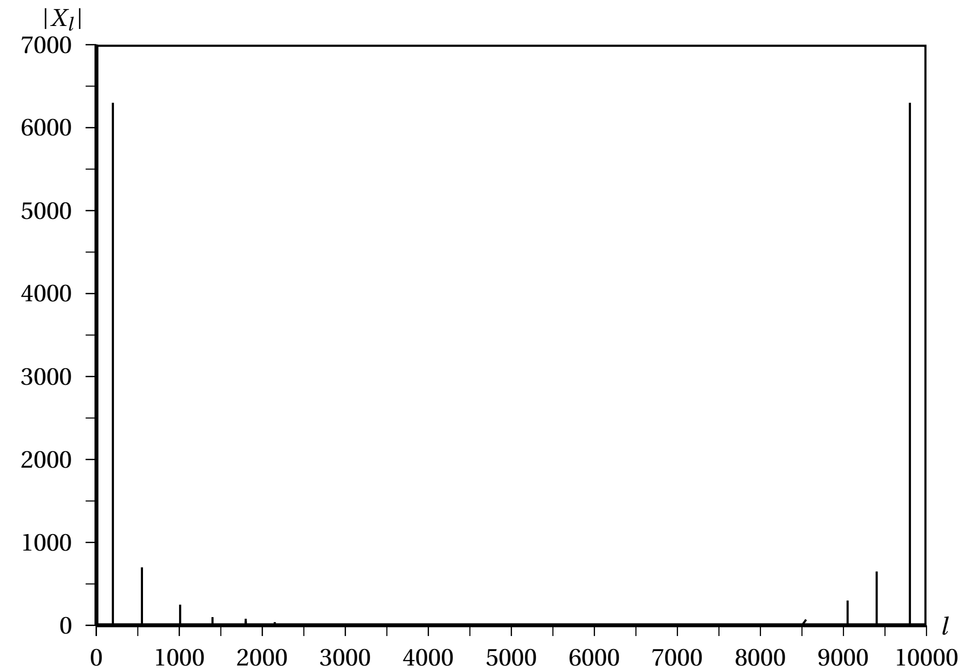
D'après ces représentations graphiques :

i. Quelle semble être la fréquence de la composante du signal ayant la plus grande amplitude ?

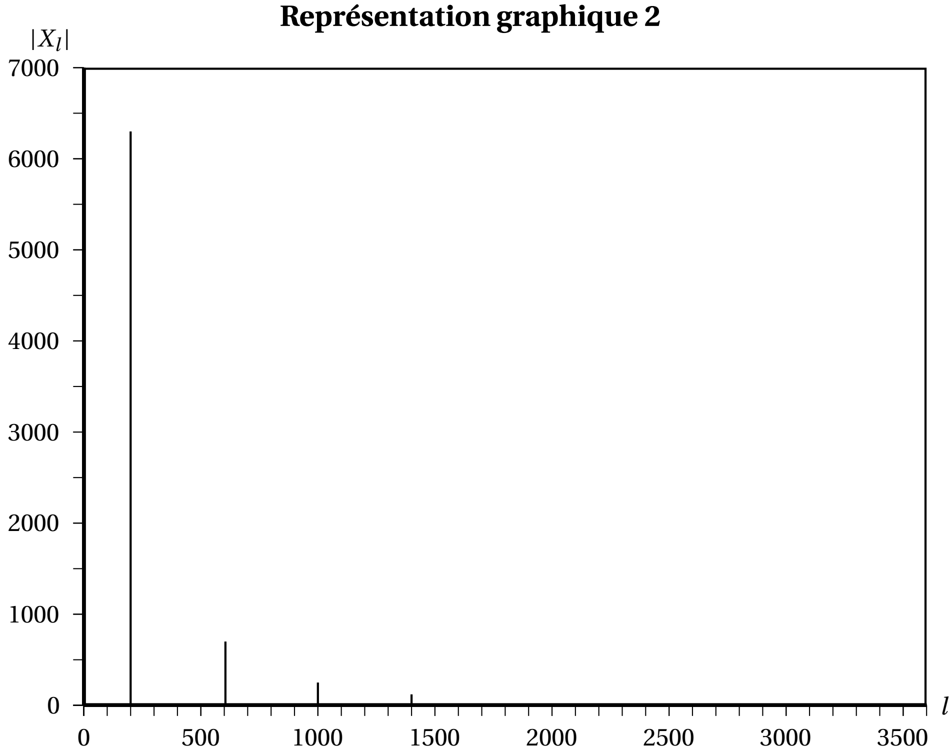
ii. On s'intéresse à la deuxième composante la plus significative (relativement à l'amplitude) du signal.

Estimer, en pourcentage de l'amplitude de la composante du signal ayant la plus grande amplitude, l'amplitude de cette deuxième composante.

Représentation graphique 1

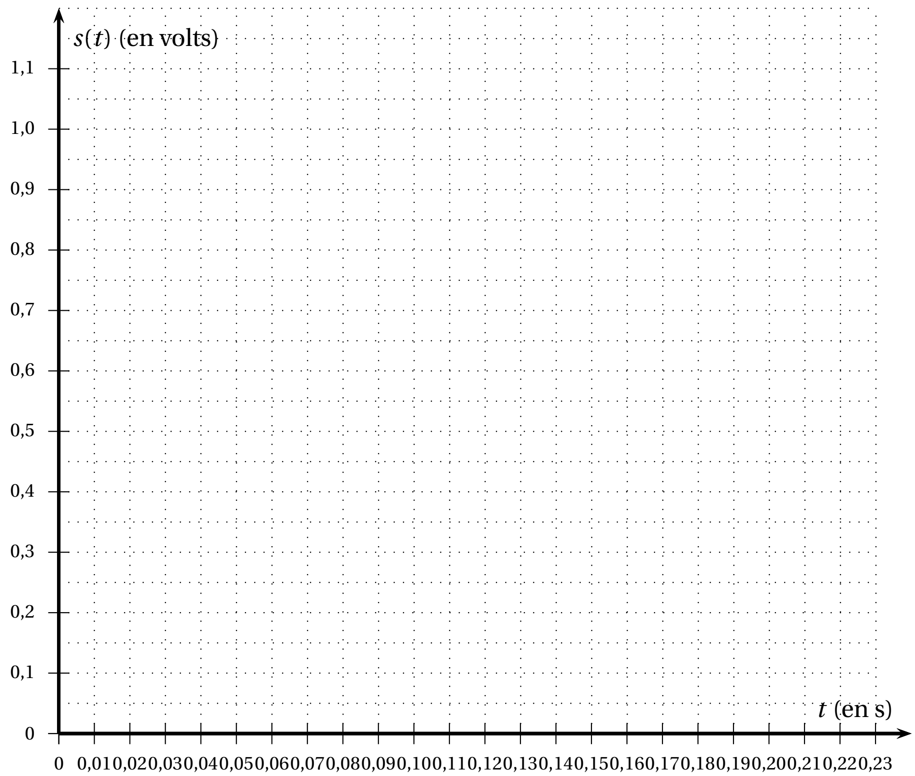


Représentation graphique 2



Document réponse 1 à rendre avec la copie

Exercice 1. Partie A. Question 2 c. : Représentation graphique de la fonction s

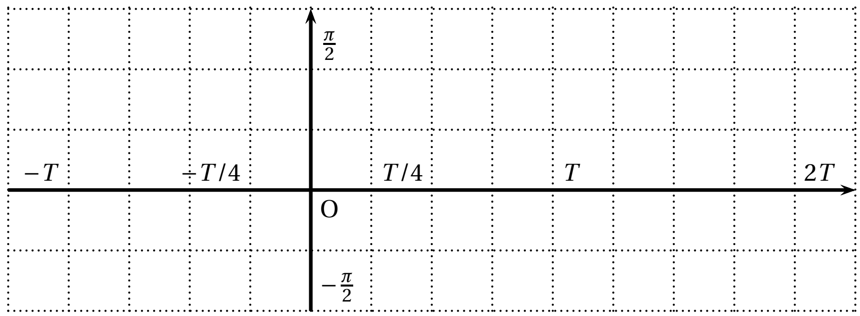


Exercice 1. Partie B. Question 2

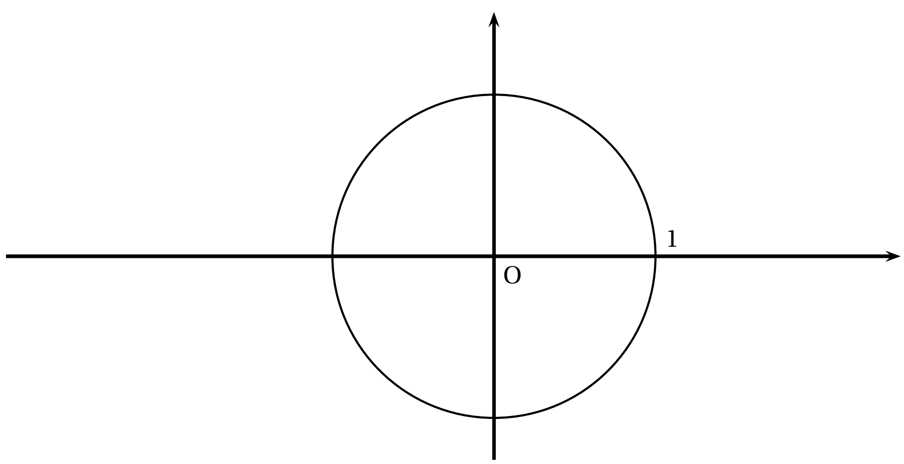
n	0	1	2	3
a_n	1			
b_{n-1}	0			
b_n	0,091			

Document réponse 2 à rendre avec la copie

Exercice 3. Question 1 : Représentation du signal s sur $[-T\ ;\ 2T]$



Exercice 3. Question 2. a.



Exercice 3. Question 2. b. : Tableau à compléter

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_k = s\left(k\frac{T}{8}\right)$	0	$\frac{\pi}{4}$				$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	
ω^{-k}	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{i}$						