BTS Métropole 17 mai 2023
Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une seule affirmation est exacte.
Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte.
Une réponse exacte vaut 1 point.
Une réponse fausse ou une absence de réponse ne sera pas pénalisée.

Question 1. On considère le nombre 2 023 écrit en base dix.
Son écriture en base seize est

A : E67	B 7E7	C : 6E7

Question 2. On considère les nombres, écrits en base deux, 1010_2 et 1011_2. La somme écrite en base deux de ces nombres est égale à

A : 1111_2	B 10011_2	C : 10101_2

Question 3. On considère la relation binaire $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \iff \left(xy \leqslant 0 \wedge x \neq y\right).$$

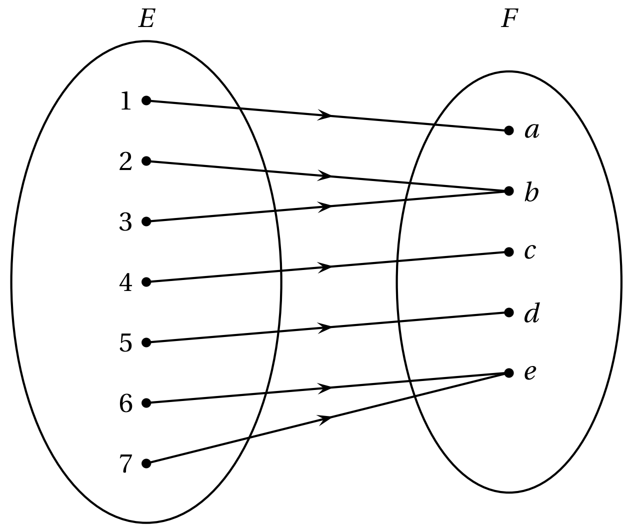
On a

A : $(-3)\mathscr{R}3$	B $(-3)\mathscr{R}(-4)$	C : $(-3)\mathscr{R}(-3)$

Question 4. La relation binaire $\mathscr{R}$ définie à la question 3 est

A : réflexive	B symétrique	C : transitive

Question 5. Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est définie par le diagramme ci-dessous.



L'application ainsi définie est

A : injective et non surjective	B surjective et non injective	C : bijective

Exercice 2 **5 points**

Partie A

On considère le graphe orienté G comportant 3 sommets notés A, B et C dont la matrice d'adjacence est P, où $P = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

1. Dessiner une représentation du graphe G.
2. **a.** Calculer la matrice P^2.

   b. Combien de chemins de longueur 2 ont pour origine B ?
3. Déterminer la matrice de fermeture transitive $\hat{P}$ et le graphe de la fermeture transitive de G.

Partie B

Dans un graphe orienté, on définit :

— le **degré entrant** d'un sommet comme étant le nombre d'arcs menant à ce sommet.

— le **degré sortant** d'un sommet comme étant le nombre d'arcs issus de ce sommet.

1. **a.** Calculer le degré entrant du sommet C du graphe G défini dans la partie A.

   b. Calculer le degré sortant du sommet C du graphe G défini dans la partie A.

2. On étudie dans cette question les graphes orientés à trois sommets numérotés de 1 à 3.

   On considère l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel où Degré_sortant désigne une fonction de paramètres M et s, M étant une matrice à 3 lignes et 3 colonnes et s un entier compris entre 1 et 3.

   Le coefficient de la matrice M situé ligne i colonne j est noté m_{ij}.

```
Fonction Degré_sortant (M, s)
    deg ← 0
    Pour j allant de 1 à 3  Faire
        Si m_sj ......Faire
        ......
        Fin de Si
    Fin de Pour
Retourner deg
```

   Compléter cet algorithme pour que la fonction renvoie le degré sortant du sommet numéroté s dans un graphe dont la matrice d'adjacence est M.

Exercice 3 **10 points**

Une entreprise décide de mettre en place une authentification à plusieurs étapes permettant à ses employés d'accéder aux services en ligne qu'elle propose.

Partie A

La première authentification consiste à utiliser un mot de passe.
À la première connexion, l'utilisateur doit créer un mot de passe de 8 à 16 caractères. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet ou des chiffres ou des caractères spéciaux (?,&, etc.).
Pour être valide, un mot de passe doit remplir au moins l'une des trois conditions suivantes :

— il contient au moins trois chiffres et au moins deux caractères spéciaux;

— il contient moins de trois chiffres, au moins deux caractères spéciaux et au moins dix lettres;

— il contient moins de deux caractères spéciaux et au moins dix lettres.

1. Les mots de passe suivants sont-ils valides? Justifier.

ABCDABCD?# STU27ABCABCDE&

On définit les variables booléennes a, b et c de la manière suivante :

- a lorsque le mot de passe contient au moins trois chiffres, $\overline{a}$ sinon;
- b lorsque le mot de passe contient au moins deux caractères spéciaux, $\overline{b}$ sinon;
- c lorsque le mot de passe contient au moins dix lettres, $\overline{c}$ sinon.

2. **a.** On appelle E l'expression booléenne qui traduit la validité d'un mot de passe.
   Traduire chacune des conditions de validité d'un mot de passe à l'aide des variables a, b et c, puis en déduire une expression de E.
   b. Représenter E dans un tableau de Karnaugh, puis en déduire une expression simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes.
   c. Traduire par une phrase l'expression simplifiée de E.
3. Déterminer l'expression booléenne $\overline{E}$ négation de E.

Partie B

Pour la seconde authentification, le serveur de l'entreprise envoie à l'utilisateur un mot de passe codé qu'il devra décoder.
Le serveur de l'entreprise code un mot de passe de la façon suivante :

— à chaque lettre de l'alphabet, on associe son rang x selon le tableau ci-dessous

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Code	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

— on fixe une clé $(a\,;b)$, où a et b sont deux entiers naturels compris entre 0 et 25 ;

— on calcule le reste y de la division de $ax+b$ par 26 ; on détermine ainsi le plus petit entier naturel y vérifiant $y \equiv ax+b\ [26]$;

— on cherche ensuite la lettre de l'alphabet dont le rang est y ;

— cette lettre code la lettre donnée au départ.

1. Le serveur de l'entreprise utilise la clé $(9\,;15)$.
   a. Montrer que la lettre C est codée par la lettre H.
   b. Par quelle lettre est codée la lettre E ?
2. L'utilisateur veut décoder la lettre V associée à l'entier $y = 21$. Pour cela il doit déterminer le plus petit entier naturel x vérifiant $21 \equiv 9x+15\ [26]$.
   a. Déterminer un entier c vérifiant $9 \times c \equiv 1\ [26]$.
   b. Montrer que si $21 \equiv 9x+15\ [26]$ alors $x \equiv 18\ [26]$.
   c. Décoder la lettre V.