BTS Polynésie 10 mai 2017
Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

Exercice 1 **11 points**

Cinq joueurs, notés A, B, C, D et E, jouent régulièrement à un jeu en ligne.
Chaque partie de ce jeu oppose deux adversaires.
Le tableau suivant donne, pour chacun des cinq joueurs, la liste des adversaires qu'il a déjà battus.

Le joueur	a déjà battu
A	B, D
B	C
C	B, D
D	E
E	D

Ainsi, par exemple, le joueur C a déjà battu les joueurs B et D.

1. Graphe orienté associé à la situation

  a. En considérant le tableau précédent comme un tableau de successeurs, représenter la situation par un graphe orienté G, dans lequel un arc relie un sommet x à un sommet y si le joueur x a déjà battu le joueur y.

  b. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe G.

  c. Recopier et compléter le tableau des prédécesseurs dans le graphe G.

Le joueur	**a déjà ......**
A	
B	
C	
D	
E	

  d. Le graphe G contient-il un circuit? Contient-il un chemin hamiltonien? Justifier les réponses.

2. Dans cette question, on note $J = \{A, B, C, D, E\}$ l'ensemble des cinq joueurs.
On note $V(x\,;\,y)$ le prédicat : « le joueur x a déjà battu le joueur y ».
Ainsi, la valeur $V(\text{A}\,;\,\text{B})$ est VRAI, et la valeur de V(B ; A) est FAUX.

On définit trois prédicats :
P1 : $\forall x \in J, \exists y \in J,\ x \neq y$ et $V(x\,;\,y)$
P2 : $\exists x \in J, \forall y \in J,\ x \neq y$ et $V(x\,;\,y)$
P3 : $\exists y \in J, \forall x \in J,\ x \neq y$ et $V(x\,;\,y)$
Associer à chaque prédicat **P1**, **P2**, **P3**, celle des trois phrases suivantes qui lui correspond parmi les phrases suivantes. Aucune justification n'est demandée.

- « Il existe un joueur qui a été battu par tous les autres joueurs ».
- « Tous les joueurs ont battu au moins un autre joueur ».

- « Il existe un joueur qui a battu tous les autres joueurs ».

3. Un joueur reçoit un bonus lorsqu'il vérifie l'un au moins des trois critères suivants :

- le joueur a participé à 20 parties ou davantage, et il a affronté plusieurs adversaires différents ;
- le joueur n'a pas affronté plusieurs adversaires différents, et il a obtenu strictement plus de victoires que de défaites ;
- le joueur n'a pas obtenu strictement plus de victoires que de défaites, et il a participé à 20 parties ou davantage.

On définit les variables booléennes a, b, c de la façon suivante :

— $a = 1$ si le joueur a participé à 20 parties ou davantage ; $a = 0$ sinon ;
— $b = 1$ si le joueur a affronté plusieurs adversaires différents ; $b = 0$ sinon ;
— $c = 1$ si le joueur a obtenu strictement plus de victoires que de défaites ; $c = 0$ sinon.

a. Écrire une expression booléenne F traduisant les conditions permettant à un joueur d'obtenir le bonus.

b. À l'aide d'un tableau de Karnaugh ou d'un calcul booléen, déterminer une écriture simplifiée de F sous forme d'une somme de deux termes.

c. En déduire une formulation simplifiée des critères permettant à un joueur d'obtenir le bonus.

4. On note S la relation « successeur » dans le graphe G.
Ainsi, l'écriture « $x\,S\,y$ » signifie que x a pour successeur y dans ce graphe.
On rappelle les définitions suivantes.

- Une relation binaire R sur un ensemble E est symétrique si pour tous x et y dans E :

$$x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x.$$

- Une relation binaire sur un ensemble E est transitive si pour tous x, y et z dans E :

$$x\,R\,y \text{ et } y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z.$$

a. La relation S est-elle transitive ? Justifier.

b. Quel(s) arc(s) faut-il ajouter au graphe pour rendre la relation S symétrique ?

Exercice 2 **9 points**

Le but de cet exercice est d'étudier une façon de parcourir un fichier de 195 clients, dont les fiches sont numérotées de 0 à 194.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A - Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 5 \text{ et, pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = 3u_n + 4.$$

1. Déterminer u_1 et u_2.

2. Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 2$.

a. Déterminer v_0, v_1 et v_2.

b. Justifier que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Déterminer une expression de v_n en fonction de n.

4. En déduire, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 7 \times 3^n - 2$.

Partie B - Étude d'un mode de parcours du fichier

Pour tout entier naturel n, on note w_n le reste de la division euclidienne de $7 \times 3^n - 2$ par 195.
On a ainsi, en particulier : $w_n \equiv 7 \times 3^n - 2$ modulo 195.
On parcourt le fichier à l'aide de la suite (w_n) en déplaçant un curseur de la façon suivante :

- initialement, le curseur est positionné sur la fiche numéro 5, qui correspond à la valeur w_0 ;
- le curseur se déplace ensuite sur la fiche numéro 19, qui correspond à la valeur w_1 ;
- plus généralement, après n déplacements, le curseur est positionné sur la fiche dont le numéro correspond à la valeur de w_n.

1. Justifier que $w_5 = 139$.

2. Justifier que $3^{13} \equiv 3$ modulo 195. En déduire que $w_{13} = 19$.

3. Soit n un entier naturel quelconque.

a. Démontrer que $w_{n+13} - w_{n+1} \equiv 7 \times 3^n \left(3^{13} - 3\right)$ modulo 195.

b. En déduire, en utilisant la question 2., que $w_{n+13} = w_{n+1}$.

c. Interpréter le résultat précédent concernant le positionnement du curseur.

4. On donne la liste des 15 premières valeurs de w_n :

$$5 - 19 - 61 - 187 - 175 - 139 - 31 - 97 - 100 - 109 - 136 - 22 - 70 - 19 - 61.$$

On considère l'ensemble $E = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, 193\ , 194\}$ et l'application f de E dans E, définie pour tout entier n de l'ensemble E par : $f(n) = w_n$.

a. L'application f est-elle injective ? Justifier la réponse.

b. L'application f est-elle surjective ? Justifier la réponse.