∽ BTS Métropole 14 mai 2018 ∾
Services informatiques aux organisations

Épreuve facultative

Exercice 1 **10 points**

Partie A

Un grand fabricant d'ordinateurs portables analyse le nombre de commandes mensuelles d'un de ses modèles au cours de certains mois, en 2017. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-après.

Mois (en 2017)	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août
x_i : rang du mois	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i : nombre de commandes	4 650	4 400	4 150	3 850	3 450	3 200	2 950	2 600

Le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ ayant un aspect rectiligne, on décide de procéder à un ajustement affine de ce nuage.

1. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$. Les coefficients a et b seront arrondis au dixième.
2. **a.** Déterminer, à l'aide de l'équation de la droite de régression, une estimation du nombre de commandes de ce modèle d'ordinateur pour le mois de novembre 2017.

   b. Expliquer pourquoi cette droite de régression ne peut servir de modèle que sur un intervalle de temps limité.

Partie B

Le fabricant commercialise un autre modèle d'ordinateur portable, avec lequel certains appareils présentent parfois un défaut d'alimentation.
Les systèmes d'alimentation utilisés proviennent de deux fournisseurs différents, notés A et B ; 60 % d'entre eux proviennent du fournisseur A, les autres du fournisseur B.
Le fabricant constate que 2 % des systèmes d'alimentation provenant du fournisseur A et 3 % de ceux provenant du fournisseur B présentent un défaut.

On prélève au hasard un ordinateur portable dans le stock du fabricant. On considère les évènements suivants :

A : « l'ordinateur prélevé a une alimentation provenant du fournisseur A » ;

B : « l'ordinateur prélevé a une alimentation provenant du fournisseur B » ;

D : « l'ordinateur prélevé présente un défaut d'alimentation ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé, à l'aide des évènements A, B, D et $\overline{D}$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $A \cap D$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Prouver que la probabilité que l'ordinateur portable prélevé présente un défaut d'alimentation est égale à 0,024.

4. Un ordinateur portable prélevé présente un défaut d'alimentation. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B.

Partie C

Dans cette partie, les probabilités, seront arrondies au millième, si besoin.

On admet désormais que la probabilité qu'un ordinateur portable prélevé au hasard dans le stock présente un défaut d'alimentation est égale à 0,024.

1. On prélève au hasard 20 ordinateurs portables dans le stock pour en vérifier le bon fonctionnement. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, parmi les 20 ordinateurs prélevés, dénombre ceux qui présentent un défaut d'alimentation.

  a. Justifier le fait que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

  b. Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur prélevé ne présente un défaut d'alimentation.

  c. En déduire la probabilité qu'au moins un ordinateur prélevé présente un défaut d'alimentation.

2. On tire cette fois-ci au hasard avec remise 1 000 ordinateurs portables dans le stock.

La variable aléatoire qui. parmi les 1 000 ordinateurs tirés, dénombre ceux présentant un défaut d'alimentation, suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}024$.

On admet que la loi de cette variable aléatoire peut être approchée par celle d'une variable Y, qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 24$ et d'écart-type $\sigma = 4{,}84$.

  a. Justifier les paramètres de la variable aléatoire Y.

  b. Déterminer la probabilité que, parmi les 1 000 ordinateurs prélevés, il y ait au moins 15 ordinateurs présentant un défaut d'alimentation, en calculant la probabilité $p(Y \geqslant 14{,}5)$.

Exercice 2 **10 points**

Un fabricant d'ordinateurs possède une unité de production qui fabrique chaque jour entre 400 et 2 000 composants identiques. On admet que lorsque x centaines de composants sont fabriquées, avec $4 \leqslant x \leqslant 20$ le bénéfice correspondant, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[4\,;\,20]$ par :

$$f(x) = -2x + 3 + 24\ln(2x).$$

Partie A - Étude de la fonction f

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;\,20]$.

1. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression suivante :

$$f'(x) = \frac{24 - 2x}{x}.$$

Démontrer ce résultat en détaillant le calcul.

2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[4\,;\,20]$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième :

x	4	5	6	8	10	12	14	18	20
$f(x)$	44,9					55,3			

b. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

En abscisses : commencer la graduation à 4 et prendre 1 cm pour une unité.

En ordonnées : commencer la graduation à 40 et prendre 1 cm pour une unité.

4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 53$ possède deux solutions que l'on notera α et β, avec :

$$\alpha \in [4\ ;\ 12] \quad \text{et} \quad \beta \in [12\ ;\ 20].$$

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième de α et β.

Partie B - Applications

1. Quel est le bénéfice réalisé pour une production de 500 composants ? Arrondir à l'euro.
2. Déterminer la quantité de composants à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal. Déterminer ce bénéfice maximal, en arrondissant le résultat à l'euro.
3. Déterminer les quantités de composants à fabriquer, à l'unité près, afin que le bénéfice soit supérieur ou égal à 53 000 euros.