Brevet de technicien supérieur Polynésie 12 mai 2016 - Services informatiques aux organisations

Épreuve facultative

Exercice 1 — 10 points

Une entreprise réalise une étude en vue de la commercialisation d'une machine qu'elle a fabriquée.
L'étude vise à déterminer le nombre de machines qu'elle doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice. On admet que toutes les machines fabriquées sont vendues.

Partie A : Étude du coût de production

Le coût de production f en milliers d'euro) de x machines est modélisé sur l'intervalle $[0\,;\,160]$ par :

$$f(x) = 0,48x^2 + 1\,000\ln(x+10).$$

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,160]$:
$$f'(x) = \frac{0,96x^2 + 9,6x + 1\,000}{x+10}$$
2. Quel est le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,160]$? Justifier.
En déduire le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (arrondir à l'unité).

x	0	20	50	70	90	110	130	160
$f(x)$			5 294		8 493		13 054	

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,160]$ dans un repère orthogonal, avec les unités graphiques suivantes : 1 cm représente 10 machines en abscisses et 1 cm représente 1 millier d'euro en ordonnées.

Partie B : Étude du bénéfice

Le prix de vente d'une machine est de 100 000 €.

1. Exprimer la recette $r(x)$ (en milliers d'euro) en fonction du nombre de machines x vendues.
2. Représenter sur le graphique de la partie A, la droite d'équation $y = 100x$.
3. Déterminer graphiquement les quantités de machines que l'entreprise peut fabriquer pour réaliser un bénéfice.

Exercice 2 — 10 points

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats sont arrondis au millième.
Un administrateur de réseaux installe des nouveaux serveurs pour ses utilisateurs répartis sur trois sites. L'installation nécessite une interruption du service pendant une période donnée. Afin de perturber le moins possible les utilisateurs, l'administrateur étudie les connections sur les trois sites dans la période considérée. On suppose que la probabilité qu'un utilisateur se connecte, dans cette période, est égale

à $0,05$. Les comportements des utilisateurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Partie A

Sur le site 1, il y a 60 utilisateurs. On note X_1 la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'utilisateurs connectés sur ce site dans la période considérée.

1. Justifier le fait que la variable aléatoire X_1 suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité de n'avoir aucun utilisateur connecté dans la période considérée.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins deux utilisateurs connectés dans cette période.

Partie B

Sur le site 2, il y a 120 utilisateurs.
On décide d'approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X_2, qui comptabilise le nombre d'utilisateurs connectés du site 2 dans la période considérée, par une loi de Poisson de paramètre λ.
On note Y la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

1. Montrer que $\lambda = 6$.
2. Calculer la probabilité $P(Y \leqslant 2)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Sur le site 3, il y a 200 utilisateurs.
On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire X_3, qui comptabilise le nombre d'utilisateurs connectés du site 3 dans la période considérée, peut être approchée par une loi normale.
Soit Z la variable aléatoire suivant cette loi de normale $\mathcal{N}(m\,;\,\sigma)$.

1. Justifier que $m = 10$ et que $\sigma \approx 3,1$ en arrondissant au dixième.
2. Déterminer la probabilité d'avoir au plus 14 utilisateurs du site 3 connectés dans la période d'interruption en calculant $P(Z \leqslant 14,5)$.
3. Calculer la probabilité que le nombre d'utilisateurs du site 3 connectés dans cette période soit compris entre 6 et 14, c'est-à-dire calculer le nombre $P(5,5 \leqslant Z \leqslant 14,5)$.