Brevet de technicien supérieur Polynésie
10 mai 2017 - Services informatiques aux organisations

Épreuve facultative

Exercice 1 **10 points**

Le tableau suivant donne le taux d'équipement des Français en téléphones mobiles pour les années 2011 à 2015. Les valeurs sont données en pourcentages arrondis à l'unité.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Taux d'équipement en smartphones (%)	18	29	39	49	58
Taux d'équipement en autres mobiles (%)	67	59	50	41	34
Taux de Français non équipés (%)	15	12	11	10	8

D'après : http ://www.zdnet.fr/actualites/infographie-portrait-de-l-utilisateur-de-smartphone-francais-39796286.htm

Dans la suite, on s'intéresse à la progression du taux d'équipement en smartphones.

Partie A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +00[$ par :

$$f(x) = \frac{75}{1+5,4\mathrm{e}^{-0,6x}}.$$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, dans lequel $f(x)$ sera arrondi au dixième.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	18,9	28,6	39,6					

2. Déterminer la limite de $\mathrm{e}^{-0,6x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement.

3. On a obtenu une expression de $f'(x)$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$f'(x) = \frac{243\mathrm{e}^{-0,6x}}{\left(1+5,4\mathrm{e}^{-0,6x}\right)^2}.$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. Construire la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Une expression de $F(x)$ est :

$$F(x) = 125\ln\left(5,4+\mathrm{e}^{0,6x}\right).$$

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[5 ; 10]$, arrondie au dixième.

Partie B - Interprétations

Pour n entier naturel, on modélise le taux d'équipement (en pourcentage) en smartphones dans la population française pour l'année $2010 + n$ par l'expression $f(n)$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
Ainsi, par exemple, $f(1)$ est le taux d'équipement pour l'année 2011.

1. Quel sera le taux d'équipement en smartphones pour l'année 2018 ? Arrondir à l'unité.
2. Donner une estimation, à long terme, du taux d'équipement des Français en smartphones.
3. Donner une estimation du taux moyen d'équipement des Français en smartphones pour la période allant de 2015 à 2020, en pourcentage arrondi à l'unité. (La population en France est supposée constante sur cette période.)

Exercice 2 **10 points**

Cet exercice envisage trois études relatives à un hôtel restaurant qui accueille des VIP (Very Important Person).

Les trois parties A, B *et* C *peuvent être traitées de manière indépendante.*
Sauf indication contraire, les probabilités calculées seront arrondies à la troisième décimale.

Partie A

L'hôtel propose deux gammes de chambres, les chambres standards et les chambres VIP.
Un client se présente à cet hôtel pour réserver une chambre. On considère cette arrivée comme une expérience aléatoire.

Les statistiques de l'hôtel conduisent aux considérations suivantes :

— la probabilité que le client choisisse une chambre VIP est égale à $0,4$;
— la probabilité que le client dîne au restaurant de l'hôtel est égale à $0,3$;
— si le client choisit une chambre VIP, la probabilité qu'il dîne au restaurant de l'hôtel est égale à $0,6$.

On note V l'évènement « le client choisit une chambre VIP », et R l'évènement « le client dîne au restaurant de l'hôtel ».

1. Exprimer les trois probabilités de l'énoncé à l'aide des évènements V et R.
2. Justifier que la probabilité de l'évènement « le client choisit une chambre VIP et dîne au restaurant de l'hôtel » est égale à $0,24$.
3. Les évènements V et R sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
4. Déterminer la probabilité de l'évènement : « le client choisit une chambre standard et ne dîne pas au restaurant de l'hôtel ».

Dans la suite de la partie A, 10 clients se présentent à cet hôtel pour réserver chacun une chambre.
On considère que les choix de ces clients sont indépendants, concernant la gamme de la chambre choisie.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de chambres VIP réservées par l'ensemble de ces 10 clients.

5. Préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X, en justifiant la réponse, puis donner les paramètres de cette loi.
6. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X, puis interpréter ce nombre dans le contexte de l'exercice.
7. Calculer $P(X \geqslant 4)$.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au montant de l'addition des clients qui dînent au restaurant de l'hôtel.
On prélève au hasard l'addition d'un client ayant dîné au restaurant de l'hôtel, et l'on note Y la variable aléatoire qui modélise le montant en euro de cette addition.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres $m = 45$ et $\sigma = 10$.

1. Calculer la probabilité $P(35 \leqslant Y \leqslant 50)$. On arrondira le résultat au millième.
2. Déterminer le réel a, arrondi au dixième, tel que $p(Y > a) = 0,90$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse aux interventions par un technicien sur le poste de télévision qui équipe une chambre VIP donnée.
La durée entre deux telles interventions, exprimée en semaine, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en semaine^{-1}).
Le temps moyen (ou MTBF) entre deux interventions est égal à 15 semaines.

1. En arrondissant au millième, justifier que $\lambda = 0,067$ (exprimé en semaine^{-1}).
2. Quelle est la probabilité que la durée entre deux interventions sur la télévision d'une chambre VIP dépasse 10 semaines ? On arrondira le résultat au millième.
3. Déterminer le réel t tel que $p(T \leqslant t) = 0,95$, en arrondissant la valeur de t à l'entier.
   Interpréter le résultat obtenu, dans le contexte de l'exercice.