# BTS Nouvelle Calédonie novembre 2017
# Services informatiques aux organisations mathématiques approfondies

**Épreuve facultative**

**Exercice 1** **10 points**

Un nouveau smartphone est mis en vente. Soit $x$ le prix unitaire en centaines d'euro de ce smartphone.

La fonction d'offre des fournisseurs (en milliers de smartphones) est la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,6]$ par

$$f(x) = 0,7\mathrm{e}^{0,5x+2}$$

où $f(x)$ modélise la quantité proposée par les fournisseurs pour un prix unitaire de $x$ en centaines d'euro.
La fonction de demande des consommateurs (en milliers de smartphones) est la fonction $g$ définie sur $]0\,;\,6]$ par

$$g(x) = 10\ln\left(\frac{20}{x}\right)$$

où $g(x)$ modélise la quantité demandée par les consommateurs pour un prix unitaire de $x$ en centaines d'euro.
Les courbes représentatives $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de $f$ et de $g$ sont tracées dans le repère orthogonal fourni en annexe.
Le point d'équilibre de l'offre et de la demande, noté A, est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

**Partie 1**

1. Identifier la courbe correspondant à $f$ et celle correspondant à $g$, en justifiant la réponse.
2. À partir d'une lecture graphique, donner les coordonnées $\left(x_0\,;\,y_0\right)$ du point A. On laissera apparents les traits de construction.

**Partie 2**

Pour déterminer les coordonnées du point A de façon précise, on est amené à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
On pose, pour tout $x$ appartenant à $]0\,;\,6]$, $h(x) = f(x) - g(x)$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

► Calcul formel

| | |
|---|---|
| 1 | $0,7\exp(0,5x+2)$<br>Dérivée : $\frac{7}{20}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+2}$ |
| 2 | $0,7\exp(0,5x+2)$<br>Intégrale : $\frac{7}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+2} + c_1$ |
| 3 | $10\ln(20/x)$<br>Dérivée : $-\frac{10}{x}$ |
| 4 | $10\ln(20/x)$<br>Intégrale : $10\left[x\ln\left(\frac{20}{x}\right) + x\right] + c_2$ |

1. **a.** À l'aide de ces résultats, déterminer les fonctions dérivées de $f$ et de $g$.
   **b.** En déduire que la dérivée de $h$ s'exprime, pour tout $x$ de $]0\,;\,6]$, par $h'(x) = 0,35\text{e}^{0,5x+2} + \dfrac{10}{x}$.
2. **a.** Étudier le signe de $h'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,6]$.
   **b.** On admet que $\displaystyle\lim_{x \to 0_+} h(x) = -\infty$.
   Établir le tableau des variations de $h$ sur l'intervalle $]0\,;\,6]$.
3. **a.** Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $x_0$ sur l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   **b.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie au centième de $x_0$.
4. En déduire le prix unitaire d'équilibre de ce smartphone en euro et le nombre de smartphones disponibles à ce prix (arrondir à la centaine).

**Partie 3**

On prendra dans cette question $x_0 = 2,7$ et $y_0 = 20$.

1. À l'aide des résultats du logiciel de calcul formel, donner une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,6]$.
2. On appelle « surplus des fournisseurs » le nombre $S = x_0 y_0 - \displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,\text{d}x$.
   **a.** Le nombre $S$ représente l'aire d'un domaine du plan qui est la différence entre deux aires.
   Hachurer sur la feuille annexe le domaine d'aire $S$.
   **b.** Calculer la valeur de $S$ (arrondir au dixième).

**Exercice 2** **10 points**

*Sauf indication contraire, les résultats non entiers seront arrondis au millième.*
*Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.*

**Partie 1 - calcul de probabilités**

Une entreprise fabrique en grande quantité des clés USB. Les clés USB produites peuvent présenter deux défauts : le défaut A et le défaut B.
On sait que :
— 5 % des pièces produites présentent le défaut B ;
— parmi les pièces présentant le défaut B, 20 % ont le défaut A ;
— parmi les pièces ne présentant pas le défaut B, 6 % ont le défaut A.
On appelle $A$ l'évènement « la clé USB présente le défaut A » et $B$ l'évènement « la clé USB présente le défaut B ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que la clé USB présente le défaut A.
3. Calculer la probabilité que la dé USB présente le défaut B sachant qu'elle a le défaut A.

**Partie 2 - loi binomiale**

On note $E$ l'évènement « la clé USB prélevée au hasard dans un stock important a un défaut ».
On suppose que $P(E) = 0,107$. On prélève au hasard quatre clés USB dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre clés USB.
On considère la variable aléatoire $X$ qui, à tout prélèvement de quatre clés, associe le nombre de clés USB de ce prélèvement ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une clé USB soit défectueuse.

**Partie 3 - approximation d'une loi binomiale par une loi normale**

Les clés USB sont commercialisées par lot de 1 000. On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'entreprise. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 clés USB.
On considère la variable aléatoire $Y$ qui, à tout prélèvement de 1 000 clés USB, associe le nombre de clés USB présentant un défaut parmi ces 1 000 clés USB.
On admet que la variable aléatoire $Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,107$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète $Y$ par la loi normale de moyenne 107 et d'écart-type 9,78. On note $Z$ la variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier les paramètres de la loi normale suivie par $Z$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 95 clés USB présentant un défaut dans le lot de 1 000 clés USB, c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 95,5)$.

**Partie 4 - loi exponentielle**

Un technicien est chargé d'étudier le fonctionnement des clés USB. Après une étude statistique, il est arrivé à la conclusion que la variable aléatoire $T$ qui, à chaque clé USB, associe sa durée de vie en jour suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,007$ jour$^{-1}$.

1. Quel est, à un jour près, la durée de vie moyenne d'une clé USB.
2. Calculer la probabilité pour qu'une clé USB ne soit plus en état de fonctionnement au bout de 200 jours.

# ANNEXE à rendre avec la copie

## Exercice 1