Brevet de technicien supérieur Nouvelle Calédonie
10 novembre 2015
Services informatiques aux organisations

Épreuve facultative –Calculatrice autorisée

Exercice 1 **10 points**

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

Une entreprise européenne fabrique, en grande quantité, des composants électroniques. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le composant est conforme aux normes en vigueur.

Partie A

Les composants sont produits en grande quantité par deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 fournit 60 % de la production totale de composants et la machine M_2 en fournit 40 %.
Lorsqu'on prélève un composant au hasard, la probabilité qu'il soit conforme est égale à $0,914$ lorsqu'il provient de la machine M_1 et à 0,879 lorsqu'il provient de la machine M_2.
On prélève au hasard un composant parmi la production totale de l'entreprise.
Tous les composants ont la même probabilité d'être tirés.
On définit les évènements :

A : « le composant provient de la machine M_1 » ;

B : « le composant provient de la machine M_2 » ;

C : « le composant est conforme ».

1. En utilisant l'énoncé, donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(C)$ et $P_B(C)$.
2. Construire un arbre pondéré pour illustrer la situation.
3. Démontrer que $P(C) = 0,9$ et formuler une interprétation de ce résultat.
4. Le composant est conforme. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la machine M_1 ?

Partie B

On prélève au hasard 10 composants dans le stock. Ce stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à 10 tirages avec remise. On note X la variable aléatoire indiquant, pour tout prélèvement de 10 composants, le nombre de composants conformes.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, 8 composants exactement soient conformes.
3. Calculer $P(X \leqslant 9)$. Interpréter le résultat trouvé par une phrase.

Partie C

L'entreprise constate que les composants sont fragiles. Elle souhaite proposer à ses clients une période supplémentaire de garantie, après remplacement d'un composant défaillant. Une étude statistique montre que la moyenne des durées de bon fonctionnement d'un composant après remplacement est de 400 jours.

On admet qu'après remplacement, la durée de bon fonctionnement d'un composant, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle.

1. Montrer que le paramètre de cette loi exponentielle, exprimé en jour^{-1}, est égal à $\lambda = 0{,}0025$.
2. Calculer la probabilité pour qu'un composant n'ait pas de défaillance au cours de l'année qui suit le remplacement, en considérant qu'une année compte 365 jours.
3. Calculer la probabilité pour qu'un composant tombe en panne au cours des deux années suivant le remplacement.

Exercice 2 **10 points**

Pour traiter un problème informatique, on dispose de deux algorithmes A_1 et A_2, qui sont implémentés sur un même ordinateur à l'aide du même logiciel de programmation.
Les deux programmes informatiques correspondant aux algorithmes A_1 et A_2 ont des durées d'exécution respectives notés d_1 et d_2, qui sont exprimées en kc (milliers de cycles d'horloge).
Ces durées dépendent toutes deux d'un entier naturel p, compris entre 30 et 10 000, qui est une caractéristique du problème.
La durée d_1 dépend du nombre de chiffres utilisés dans l'écriture de l'entier p, et donc de son logarithme népérien, noté $\ln(p)$.
Une étude statistique a permis de modéliser cette durée d_1 exprimée en kc, par l'expression :

$$d_1 = 10\,080 \times \ln(p) + 67\,550.$$

Le but de l'exercice est d'exprimer la durée d_2 en fonction de l'entier p, puis de comparer les durées d_1 et d_2 selon les valeurs de l'entier p.

Partie A : expression de d_2 en fonction de p

Le tableau suivant rassemble les instructions de programmation de l'algorithme A_2, ainsi que les temps d'exécution correspondants du programme utilisé.

Instructions	Temps d'exécution
Variables : *p est un entier compris entre* 30 *et* 10 000	0 kc
Initialisation	1 200 kc
Traitement	
Boucle 1 *(à répéter p fois)* :	
Instructions fixes de la boucle 1	135 kc
Boucle 2 *(à répéter* 12 *fois)* :	
Instructions fixes de la boucle 2	18 kc
Boucle 3 *(à répéter* 12 *fois)* :	
Instructions fixes de la boucle 3	0,75 kc
Fin boucle 3	
Fin boucle 2	
Fin boucle 1	
Sortie	0 kc

1. Calculer, en kc, la durée de chaque passage dans la boucle 2. En déduire la durée totale de la boucle 2 (12 passages).
2. Montrer que la durée de chaque passage dans la boucle 1 est égale à 459 kc.
3. En déduire que la durée d_2 d'exécution du programme correspondant à l'algorithme A_2, exprimée en kc, s'exprime par : $d_2 = 459p + 1\,200$.

Partie B : étude de fonctions

On considère les fonction f, g et h définies pour tout réel x de l'intervalle $[30\,;\,10000]$ par :

$$f(x) = 10080\ln(x) + 67550, \quad g(x) = 459x + 1200 \text{ et } h(x) = f(x) - g(x).$$

1. Calculer $h'(x)$ et montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[30\,;\,10000]$, on a :

$$h'(x) = \frac{10080 - 459x}{x}.$$

2. Sur l'intervalle $[30\,;\,10000]$, étudier le signe de $h'(x)$, et dresser le tableau de variations de la fonction h.

3. En déduire qu'il existe un unique réel r dans l'intervalle $[30\,;\,10000]$, tel que $h(r) = 0$.

Donner un encadrement de ce nombre r par deux entiers consécutifs.

Partie C : retour au problème initial

1. Dans cette question, on pose $p = 1100$.

2. Avec cette valeur de p, calculer et comparer les durées d_1 et d_2 d'exécution de chacun des deux programmes, liés aux algorithmes A_1 et A_2.

3. En utilisant la partie B, comparer suivant les valeurs de l'entier p appartenant à l'intervalle $[30\,;\,10000]$, les durées d'exécution de chacun des programmes.

4. Un utilisateur emploie régulièrement les deux programmes, uniquement avec des valeurs de l'entier p régulièrement réparties entre 1 000 et 1 200.

Pour cet utilisateur, on peut ainsi modéliser la durée moyenne d'exécution du programme lié à l'algorithme A_1 par la valeur moyenne, sur l'intervalle $[1000\,;\,1200]$, de la fonction f définie dans la partie B.

On note m_1 cette valeur moyenne.

a. En arrondissant à l'entier, une calculatrice donne la valeur : $\displaystyle\int_{1000}^{1200} f(x)\,\mathrm{d}x = 27625396.$

Calculer, pour l'utilisateur, la durée moyenne m_1 du programme lié à l'algorithme A_1.

Arrondir le résultat au kc.

b. De même, pour l'utilisateur, on modélise la durée moyenne d'exécution du programme lié à l'algorithme A_2 par la valeur moyenne, sur l'intervalle $[1000\,;\,1200]$, de la fonction g définie dans la partie B.

Calculer cette durée moyenne, notée m_2, en arrondissant le résultat au kc.

Comparer la rapidité des deux programmes correspondant aux algorithmes A_1 et A_2.