BTS Métropole 16 mai 2025

Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé
Durée : 2 heures

Exercice 1 — 10 points

Partie A

En 2023, une entreprise jetait 20 tonnes d'emballages cartonnés. Elle souhaite réduire la quantité d'emballages cartonnés qu'elle jette de 3 % par an en réutilisant les cartons les moins abîmés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de tonnes d'emballages cartonnés jetés par l'entreprise durant l'année $2023 + n$. Ainsi on a $u_0 = 20$.

1. **a.** Calculer u_1. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c. Déterminer la nature de la suite (u_n).
2. **a.** Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
   b. En déduire, à 0,001 tonne près, le nombre de tonnes d'emballages cartonnés jetés en 2029.
   c. Déterminer, en justifiant la réponse, l'année à partir de laquelle l'entreprise jettera moins de 15 tonnes d'emballages cartonnés par an.

Partie B

Après avoir trié et stocké les emballages en carton qu'elle pouvait réutiliser, l'équipe chargée du tri a constaté que :

- 22 % des emballages en carton réutilisables nécessitent d'être consolidés ;
- parmi les emballages en carton qui ne nécessitent pas d'être consolidés, 83 % sont de petite taille ;
- parmi les emballages en carton qui doivent être consolidés, 5 % sont de petite taille.

On choisit au hasard un emballage en carton réutilisable dans le stock. On considère les évènements suivants :

C : « l'emballage doit être consolidé » ;
T : « l'emballage est de petite taille ».

On rappelle que, quel que soit l'évènement E, on note $\overline{E}$ son évènement contraire.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en respectant les notations données ci-dessus.
2. **a.** Déterminer la probabilité de $C \cap T$ et donner une interprétation du résultat trouvé.
   b. Montrer que $P(T) = 0,6584$ et donner une interprétation du résultat trouvé.
3. Un emballage en carton de petite taille est prélevé au hasard dans le stock. Déterminer la probabilité qu'il nécessite d'être consolidé. On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au millième.
Les emballages en carton réutilisables sont rangés dans des caisses hermétiques pouvant contenir 20 cartons pliés. Pour constituer ces caisses, l'entreprise prélève au hasard 20 cartons réutilisables dans son stock. Ce stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à tout lot de 20 cartons, associe le nombre de ceux qui ont été consolidés.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun carton qui ait été consolidé.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 4 cartons consolidés dans le lot choisi au hasard.

Exercice 2 — 10 points

Partie A

Une entreprise de jardinage s'est lancée dans l'e-commerce depuis 2017. On a répertorié son chiffre d'affaires en milliers d'euros (k€) réalisé chaque année jusqu'en 2023.

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaires en k€ : y_i	$81,7$	$120,3$	$150,2$	$200,3$	$286,1$	$402,1$	$512,3$

On souhaite estimer le chiffre d'affaires de cette entreprise en 2026.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs à $0,01$.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x, on arrondira les coefficients au centième.

3. Justifier que le chiffre d'affaires y pour l'année de rang x peut être modélisé par l'expression

$$y = A\,\mathrm{e}^{Bx}$$

où $A = 61{,}56$ et $B = 0{,}31$ à 0,01 près.
item À l'aide de l'ajustement trouvé précédemment, estimer le chiffre d'affaires de cette entreprise en 2026. Arrondir à 0,01 près.

Partie B

Suite à une modernisation de son site de vente en ligne, l'entreprise étudie pendant 24 heures le nombre de visites sur ce site, le jour d'ouverture des soldes. Le nombre de visites en milliers est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,24]$ par

$$f(x) = 55x\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}$$

où x représente le nombre d'heures écoulées depuis 7 h du matin.

1. Pour tout x appartenant à $[0\,;\,24]$, vérifier que

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-0{,}4x}(-22x+55).$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,24]$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f. Arrondir la valeur des images au centième si besoin.
4. **a.** Déterminer le nombre de visites maximal durant ces 24 heures.
   b. Au bout de combien d'heures ce nombre de visites maximal est-il atteint ?
5. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 20$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,2{,}5]$.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée par excès à $0{,}1$ près de α.
   c. On admet que l'équation $f(x) = 20$ admet également une unique solution sur $[2{,}5\,;\,24]$ et qu'une valeur approchée à 0,1 près par défaut de cette solution est 7,5.

   Déterminer le nombre d'heures pendant lesquelles il y a eu plus de 20 000 visites sur le site.