BTS Polynésie - mai 2025
Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

L'évolution de la finesse de gravure d'un processeur est un élément clé dans l'amélioration des performances et de l'efficacité énergétique des puces électroniques.

La finesse de gravure fait référence à la taille des composants individuels sur une puce, mesurée en nanomètres (nm). Plus elle est petite, plus les performances sont accrues. Au fil des années, la finesse de gravure des processeurs a considérablement diminué.

Dans le tableau ci-dessous, on donne la taille en nanomètres (nm) d'un processeur selon les années, entre 2004 et 2022.

Année : x_i	2004	2007	2010	2013	2016	2019	2022
Taille (en nm) : y_i	90	65	32	22	14	10	7

Le nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ suggère de procéder à un ajustement exponentiel.
Ainsi, on pose $z_i = \ln y_i$.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs à 10^{-3}.

Année : x_i	2004	2007	2010	2013	2016	2019	2022
$z_i = \ln y_i$							

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$, arrondi à 10^{-3}.
Que peut-on en déduire concernant l'ajustement affine de cette série statistique ?

3. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $z = ax + b$. Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-4}.

4. Justifier que la taille y d'un processeur en nanomètres, l'année x, peut être modélisée par l'égalité $y = \mathrm{e}^{-0,1456x+296,267}$.

On admet pour la suite de l'exercice que cet ajustement reste valable jusqu'en 2030.

5. Déterminer en quelle année la taille estimée du processeur deviendra inférieure à 3 nm.

Partie B

On s'intéresse ici à la production de processeurs par une entreprise. Pour fabriquer un processeur, cette entreprise choisit au hasard 10 composants dans son stock. On considère que le stock est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

On suppose que la probabilité qu'un composant du processeur soit défectueux est égale à 0,1.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque processeur, associe le nombre de composants défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Arrondir à 10^{-3}.
2. Calculer la probabilité qu'aucun des composants du processeur ne soit défectueux.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 3 composants soient défectueux. Arrondir à 10^{-3}.

Partie C

La durée de vie, en années, d'un processeur peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

1. Déterminer la durée de vie moyenne d'un processeur.
2. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un processeur soit inférieure à 7 années.

Exercice 2 — 10 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Une entreprise décide d'utiliser un « nuage » lui permettant de stocker ses données sur un serveur distant, accessible via internet.

Au mois de janvier 2023, la capacité de stockage de ce « nuage » était de 150 gigaoctets (Go). L'entreprise décide alors d'augmenter cette capacité de 5 % chaque mois.

Pour tout entier naturel n, on note s_n la capacité de stockage du « nuage » utilisé par l'entreprise, en gigaoctets (Go), le n-ième mois après janvier 2023. Ainsi, on a $s_0 = 150$.

1. Calculer s_1 puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2.
   a. Pour tout entier naturel n, exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.

   b. En déduire la nature de la suite (s_n) en précisant sa raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer s_n en fonction de n.
4. Estimer la capacité de stockage de cette entreprise au mois de mars 2024.

   Arrondir le résultat à l'unité.
5. À l'aide d'une inéquation, calculer à partir de quelle date (mois et année) la capacité de stockage de l'entreprise dépassera 1 000 Go, soit à 1 téraoctet (To).

   Arrondir le résultat à l'unité.

Partie B

L'utilisation de ce « nuage » par l'entreprise génère un coût mensuel variant selon sa capacité de stockage.

Pour une capacité de stockage de x téraoctet (To), le coût mensuel, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[10\,;500]$ par :

$$C(x) = -15\ln(2x+1) + 10x.$$

On note C' la fonction dérivée de la fonction C.

1. Calculer le coût mensuel pour une capacité de stockage de 10 To. Arrondir à 10^{-1}.
2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[10\,;\,500]$, $C'(x) = \dfrac{20x-20}{2x+1}$.
3. Étudier le signe de $C'(x)$ sur l'intervalle $[10\,;\,500]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction C sur ce même intervalle. On arrondira la valeur des images à 10^{-1}.
4. **a.** Démontrer que l'équation $C(x) = 2\,000$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[10\,;500]$.

   b. On admet qu'une valeur approchée de α à 1 près par défaut est 209.
   L'entreprise ne souhaite pas dépenser plus de 2 000 euros par mois pour l'utilisation du « nuage ».

   Déterminer la capacité de stockage maximale qu'elle pourra utiliser.