BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS Nouvelle-Calédonie décembre 2019

Mathématiques approfondies

Exercice 1 **10 points**

Une usine produit en série des verres optiques photochromiques. La production comporte 2 phases : la fabrication du verre puis l'application de la couche photosensible.
Les parties A et B sont indépendantes. Elles envisagent deux aspects de cette production.

Partie A : étude des défauts des verres

Une étude statistique indique que la première phase de fabrication occasionne un défaut a dans 10 % des cas et la seconde phase un défaut b dans 8 % des cas.

On prélève au hasard un verre dans la production. On note :

A, l'évènement : « le verre présente le défaut a »,

B, l'évènement : « le verre présente le défaut b »,

C, l'évènement : « le verre présente le défaut a et le défaut b »,

D, l'évènement : « le verre présente le défaut a ou le défaut b »,

E, l'évènement : « le verre ne présente qu'un seul des deux défauts ».

1. On admet que la probabilité de l'évènement C est égale à : $P(C) = 0{,}006$.

les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2. **a.** Justifier que $P(D) = 0{,}174$.

b. Calculer $P(E)$.

c. Sachant que le verre présente au moins un défaut, calculer la probabilité qu'il ait un défaut de type a.

3. On prélève au hasard successivement n verres optiques dans le stock de l'entreprise. On suppose que le nombre de verres fabriqués est assez grand pour considérer les tirages indépendants et équiprobables. On admet que la probabilité qu'un verre, pris au hasard dans le stock, ne présente aucun défaut est égale à 0,826.

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque prélèvement, de n verres, le nombre de verres ne présentant aucun défaut. Justifier que la loi suivie par la variable aléatoire X est binomiale.

4. Dans cette question, on choisit $n = 10$.

a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b. Déterminer la probabilité de l'évènement F : « au moins 9 verres prélevés dans le stock n'ont aucun défaut ».

c. Déterminer la probabilité qu'aucun verre du lot ne présente de défaut.

5. Dans cette question, on choisit $n = 100$.

a. Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X. Arrondir à 0,001 près.

b. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de la variable aléatoire Y d'espérance $m = 82{,}6$ et d'écart type $\sigma = 3{,}8$.

i. Calculer la probabilité que dans le lot de $n = 100$ verres prélevés, il y ait entre 9 et 12 verres défectueux. Autrement dit, calculer $P(87{,}5 \leqslant Y \leqslant 91{,}5)$.

ii. Calculer la probabilité que dans ce lot de 100 verres, il y ait au moins 11 verres défectueux. Autrement dit, calculer $P(Y \leqslant 89{,}5)$.

Partie B : étude du coefficient de transmission des verres

Les verres photochromiques s'assombrissent ou s'éclaircissent en fonction de la luminosité.

Dans cette partie, on étudie le coefficient de la transmission d'un verre minéral photochromique en fonction de la longueur d'onde de la lumière lors de la phase de transition entre l'état sombre et l'état clair.

Suite à une étude expérimentale, on a obtenu le tableau de valeurs ci-dessous, dans lequel x correspond à la longueur d'onde en nanomètre (nm) et y au coefficient de transmission, exprimé en pourcentage.

Longueur d'onde en nanomètre (en nm)	400	410	420	430
Coefficient de transmission (en %)	4	25	55	85

1. Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindre carrés.

2. Estimer alors le coefficient de transmission pour une longueur d'onde de 416 nm (arrondir à l'unité).

Exercice 2 **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{85}{1+0{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}}$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant, dans lequel $f(x)$ sera arrondi au centième :

x	0	2	4	6	8	10	12	14	15	16
$f(x)$								82,42	82,96	83,39

2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$.

a. Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On appelle U la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ qui, à tout x de $[0\,;\,+\infty[$, associe $U(x) = 1+0{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}$.

a. Montrer que $U'(x) = -0{,}216\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}$

b. En déduire que $f'(x) = \dfrac{18{,}36\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}}{\left(1+0{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}\right)^2}$.

4. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. Construire sur **une feuille de papier millimétré, à rendre avec la copie**, la représentation graphique C de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,16]$. On utilisera 1 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

5. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir une primitive F de la fonction f, définie par l'expression

$$F(x) = 354\ln\left(0{,}9+\mathrm{e}^{0{,}24x}\right).$$

a. Calculer une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{16} f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'unité près.

Hachurer l'aire correspondante sur le graphique.

b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,16]$, arrondie à l'unité.

Partie B

On s'intéresse maintenant au taux d'équipement en micro-ordinateur des ménages français.
À partir d'une étude menée par l'INSEE sur ce sujet entre les années 2004 et 2016 on choisit de modéliser ce taux exprimé en pourcentage par l'expression $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A de l'exercice et x est le temps exprimé en année à partir du 1er janvier 2004.
Ainsi, par exemple, $f(1)$ était le taux d'équipement au 1er janvier 2005.

1. Quel serait le taux d'équipement en micro-ordinateur exprimé en pourcentage prévu au 1er janvier 2020 ? Arrondir à l'unité.

2. Donner en pourcentage une estimation, à long terme, du taux d'équipement en micro-ordinateur des ménages français.

3. Donner en pourcentage une estimation du taux moyen d'équipement en micro-ordinateur des ménages français pour la période allant du 1er janvier 2004 au 1er janvier 2020 ; arrondir à l'unité.