∾ Brevet de technicien supérieur ∾
Opticien lunetier session 2000

Exercice 1 **9 points**

Partie A

Une machine fabrique des pièces métalliques de forme cylindrique utilisables pour des branches de lunettes. On note L la variable aléatoire qui à chaque pièce de la fabrication associe sa longueur exprimée en mm. La machine a été réglée de façon que L suive la loi normale de moyenne 110 et d'écart type 1.

On note D la variable aléatoire qui à chaque pièce de la fabrication associe son diamètre exprimé en mm. La machine est réglée de façon que D suive la loi normale de moyenne 2 et d'écart type $0,1$.

On admet que les variables aléatoires L et D sont indépendantes.

1. La longueur d'une pièce est considérée comme correcte si eUe est comprise entre $108,5$ mm et $111,5$ mm. Calculer la probabilité P_1, qu'une pièce prélevée au hasard dans la fabrication ait une longueur correcte.
2. Le diamètre d'une pièce est considéré comme correct s'il est supérieur à $1,8$ mm. Calculer la probabilité P_2, qu'une pièce prélevée au hasard dans la fabrication ait un diamètre correct.
3. Une pièce est acceptée si sa longueur et son diamètre sont corrects. Calculer la probabilité P_3 qu'une pièce soit refusée.

Partie B

Dans la suite du problème on s'intéresse à la longueur de l'ensemble des pièces produites par la machine le 6 octobre 1999. Elles sont assemblées par lots de 50. Un lot pris au hasard est considéré comme un échantillon de la fabrication.

Le tableau suivant décrit la distribution des longueurs des pièces de ce lot.

Longueur des pièces*	Nombre de pièces
[107 ; 108[	1
[108 ; 109[	6
[109v; 110[	14
[110 ; 111[	20
[111 ; 113[	9

* exprimée en mm

1. On suppose que la longueur d'une pièce est égale à la valeur centrale de la classe dans laquelle elle est répertoriée.

   Calculer la moyenne m des longueurs des pièces de l'échantillon, ainsi que son écart type σ.

   On retiendra pour m et σ eurs valeurs arrondies au centième. Le détail des calculs n'est pas demandé.
2. Déduire des résultats obtenus à la question précédente, une estimation μ de la moyenne des longueurs des pièces de la fabrication.

3. On admet que la variable aléatoire L qui, à chaque échantillon de 50 pièces, associe la moyenne des longueurs de pièces de cet échantillon, suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{50}}\right)$.

Estimer par un intervalle de confiance la moyenne des longueurs des pièces de la fabrication avec le coefficient de confiance 0,9.

Exercice 2 **11 points**

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$, par

$$f(x) = 7,5.1O-^{8}\,(x-500)^3 - 0,03\mathrm{e}^{(5-0,01x)} + 15$$

(où e désigne la fonction exponentielle népérienne.

I. ÉTUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et g la fonction définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$, par $g(x) = xf'(x) - f(x)$soit

$$g(x) = \frac{3(x+100)\mathrm{e}^{(5-0,01x)}}{10^4} + \frac{3\left(x^3 - 750x^2 - 375.10^5\right)}{2.10^7}.$$

1. Les fonctions dérivées première et seconde de la fonction g étant notées respectivement g' et g'', vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$:

$$g'(x) = \frac{3x\mathrm{e}^{(5-0,01x)}}{10^6} + \frac{9x(x-500)}{2.10^7}$$

$$g''(x) = \frac{3(x-100)^{(5-0,01x)}}{10^6} + \frac{9x(x-250)}{10^7}$$

2. Étudier, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$, le signe de $(x-100)\mathrm{e}^{(5-0,01x)}$ et le signe de $(x-250)$; en déduire le signe de la fonction g''.

3. **a.** Indiquer quel est le sens de variation de la fonction g'.

b. Calculer $g'(500)$ et $g'(1\,000)$.

c. Montrer qu'il existe un et un seul nombre de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$, que l'on notera α, tel que $g'(\alpha) = 0$.

d. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	500 $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ 1 000
Signe de $g'(x)$	0
Sens de variation de la fonction g	

e. Calculer $g(500)$; en déduire le signe de $g(a)$.

f. Calculer $g(1\,000)$.

g. Montrer que la fonction g s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$. On notera β le nombre de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$ tel que $g(\beta) = 0$.

h. Préciser, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$, le signe de $g(x)$.

II. RECHERCHE DU MINIMUM D'UNE FONCTION

Dans ce paragraphe, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté au repère $(\mathrm{O}x,\mathrm{O}y)$.

1. Montrer que la fonction f est une fonction croissante.
2. Dans le plan rapporté au repère (Ox, Oy) :
   — placer les points $_A$i de coordonnées $(100i\ ;\ f(100i))$ pour tout i entier compris entre 5 et 10 $(5 \leqslant i \leqslant 10)$.
   — tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.
3. Le nombre x étant un nombre de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x.
   Écrire, à l'aide de x et de $f(x)$, la valeur du coefficient directeur de la droite (OM).
4. On considère la fonction p définie, pour tout nombre x réel de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$, par $p(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   a. La fonction dérivée de la fonction p étant notée p' et g désignant la fonction étudiée au paragraphe A, vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[500\,;\,1\,000]$,
   $$p'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$
   b. Étudier le sens de variation de la fonction p et en déduire que $p(\beta)$, où β est le nombre mis en évidence à la question A. 4. c., est le minimum de la fonction p.
5. **a.** Par une lecture graphique, à l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, proposer une valeur approchée du nombre β (justifier la réponse donnée).
   b. En utilisant la valeur approchée du nombre b trouvée précédemment ainsi que la fonction g, étudiée au paragraphe A, déterminer la valeur arrondie à l'unité de β.
6. On note A le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse β. Montrer que la droite (OA) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

III. APPLICATIONS

Dans une entreprise, une étude a montré que le coût total $C(q)$ exprimé en milliers de francs de la production de q articles, lorsque q est compris entre 500 et 1 000, $500 \leqslant q \leqslant 1000$), est donné par la relation :

$$C(q) = f(q).$$

Pour une production de q articles, on appelle coût moyen par article le nombre $\dfrac{C(q)}{q}$.
Actuellement, la production est de 600 articles.
Le directeur souhaite augmenter cette production pour diminuer le coût moyen par article. Est-ce possible ? Et si oui, jusqu'à quelle quantité ?
(Justifier la réponse donnée).

IV. CALCUL D'INTÉGRALE

1. Déterminer une fonction primitive de la fonction f.
2. Calculer la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité, de l'intégrale

$$\int_{500}^{1\,000} f(x)\,\mathrm{d}(x).$$