

∞ BTS Métropole 16 mai 2025 ∞

**Groupement B3<sup>1</sup>**

**Durée : 2 heures**

**L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé  
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé**

**Exercice 1**

**10 points**

Pour fabriquer de l'aluminium en feuille on chauffe une plaque d'aluminium à 250 °C puis on la sort du four : c'est alors la phase de refroidissement. On étudie l'évolution de la température de la plaque d'aluminium durant cette phase.

On note  $f(t)$  la température de la plaque d'aluminium à l'instant  $t$ .

$f(t)$  est exprimée en degré Celsius, et  $t$  désigne le nombre de minutes de refroidissement.

*Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

**Partie A. Équation différentielle**

On sait que la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' + 0,25y = 7,5,$$

où  $y$  est une fonction inconnue de la variable réelle  $t$ , définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , et où  $y'$  est la dérivée de  $y$ .

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0): \quad y' + 0,25y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = ke^{-at}, \quad k \in \mathbb{R}$

2. Soit  $c$  un nombre réel.

On considère la fonction constante  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$g(t) = c.$$

Déterminer le réel  $c$  pour que la fonction  $g$  soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer l'expression de la fonction  $f$  sachant qu'à l'instant  $t = 0$  la température est égale à 250 °C.

---

1. Électrotechnique

**Partie B. Étude de fonction**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(t) = 220e^{-0,25t} + 30.$$

On admet que  $f(t)$  représente la température (en degré Celsius) de la plaque d'aluminium après  $t$  minutes de refroidissement.

1. Déterminer la valeur approchée à 0,1°C de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement.
2. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .  
Quelle est la conséquence pour la courbe représentative de la fonction  $f$ ?  
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Déterminer  $f'(t)$  pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .  
En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .  
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Un technicien affirme : « en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés ».  
A-t-il raison? Quelle est la durée nécessaire, arrondie à la seconde, pour que la température de la plaque passe en dessous de 150 °C?  
Les réponses devront être justifiées.
5. Réaliser sur la copie un croquis donnant l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f$ . Ce croquis devra également faire apparaître les résultats des questions 1 à 4.

**EXERCICE 2****10 points**

*Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.*

On note  $u(t)$  la tension aux bornes d'un générateur, exprimée en volt, en fonction du temps, exprimé en seconde.

On sait que  $u(t)$  est une fonction périodique de période  $T = \pi$ , définie par :

$$u(t) = t \quad \text{pour} \quad t \in [0; \pi[.$$

On dit aussi que  $u(t)$  est un signal.

1. Donner la valeur de  $u(1)$ ,  $u(\pi)$ ,  $u(\pi + 1)$ ,  $u(4)$ .
2. Faire sur la copie un croquis donnant l'allure du signal  $u(t)$ , sur un intervalle dont la longueur est au moins égale à trois périodes.
3. Un signal est dit *alternatif* si sa valeur moyenne sur une période est nulle.  
Le signal  $u(t)$  est-il alternatif? justifier.
4. Déterminer la fréquence  $f$  du signal  $u(t)$ , ainsi que sa pulsation  $\omega$ .

5. On s'intéresse à présent au développement en série de Fourier du signal  $u(t)$ .  
On admet que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\int_0^\pi t \sin(2nt) dt = -\frac{\pi}{2n}$$

En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$b_n = -\frac{1}{n}.$$

6. Les *amplitudes* d'un signal sont les nombres  $A_n$  définis par :

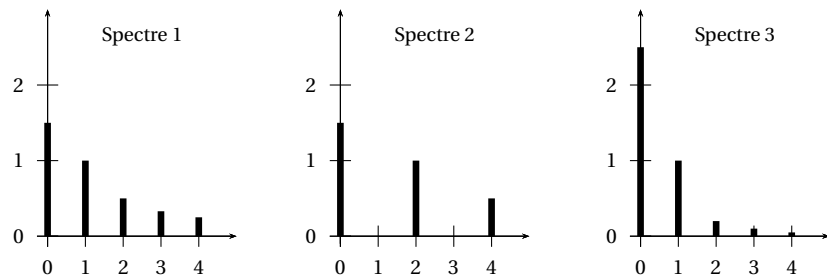
$$A_0 = |a_0| \quad \text{et, pour } n \geq 1 \quad A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}.$$

On admet que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $a_n = 0$ .

Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4
Valeur exacte de $A_n$	.....	.....	.....	.....	.....
Valeur approchée de $A_n$ à $10^{-2}$ près	.....	.....	.....	.....	.....

7. Le spectre d'un signal est un diagramme en barres dont les abscisses sont les entiers  $n \geq 0$ , et dont les ordonnées sont les amplitudes  $A_n$ .  
On a représenté ci-dessus trois spectres.



- a. Expliquer pourquoi le Spectre 2 ne peut pas être celui du signal  $u(t)$ .
- b. Expliquer pourquoi le Spectre 3 ne peut pas être celui du signal  $u(t)$ .

**FORMULAIRE sur les séries de Fourier.**

$f$  est une fonction périodique de période  $T$  et de pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Développement en série de Fourier de la fonction  $f$  :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n \geq 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n \geq 1).$$

➔ Lorsque la fonction  $f$  est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n \geq 1).$$