BTS Métropole 16 mai 2025

Groupement B4[1]

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **8 points**

Pour fabriquer de l'aluminium en feuille on chauffe une plaque d'aluminium à 250°C puis on la sort du four : c'est alors la phase de refroidissement. On étudie l'évolution de la température de la plaque d'aluminium durant cette phase.
On note $f(t)$ la température de la plaque d'aluminium à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en degré Celsius, et t désigne le nombre de minutes de refroidissement.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Équation différentielle

On sait que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + 0,25y = 7,5,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0) : \quad y' + 0,25y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}, \quad k \in \mathbb{R}$

2. Soit c un nombre réel.
On considère la fonction constante g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = c.$$

Déterminer le réel c pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer l'expression de la fonction f sachant qu'à l'instant $t = 0$ la température est égale à 250 °C.

1. Systèmes phoniques

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 220\mathrm{e}^{-0,25t} + 30.$$

On admet que $f(t)$ représente la température (en degré Celsius) de la plaque d'aluminium après t minutes de refroidissement.

1. Déterminer la valeur approchée à 0,1 °C de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Quelle est la conséquence pour la courbe représentative de la fonction f ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Déterminer $f'(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Un technicien affirme : « en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés ».

   A-t-il raison ?

   Quelle est la durée nécessaire, arrondie à la seconde, pour que la température de la plaque passe en dessous de 150 °C ?

   Les réponses devront être justifiées.
5. Réaliser sur la copie un croquis donnant l'allure de la courbe représentative de la fonction f. Ce croquis devra également faire apparaître les résultats des questions **1** à **4**.

EXERCICE 2 — 8 points

Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.

On note $u(t)$ la tension aux bornes d'un générateur, exprimée en volt, en fonction du temps, exprimé en seconde.
On sait que $u(t)$ est une fonction périodique de période $T = \pi$, définie par :

$$u(t) = t \quad \text{pour} \quad t \in [0\,;\,\pi[.$$

On dit aussi que $u(t)$ est un signal.

1. Donner la valeur de $u(1)$, $u(\pi)$, $u(\pi+1)$, $u(4)$.
2. Faire sur la copie un croquis donnant l'allure du signal $u(t)$, sur un intervalle dont la longueur est au moins égale à trois périodes.
3. Un signal est dit *alternatif* si sa valeur moyenne sur une période est nulle.

   Le signal $u(t)$ est-il alternatif ? justifier.
4. Déterminer la fréquence f du signal $u(t)$, ainsi que sa pulsation ω.

5. On s'intéresse à présent au développement en série de Fourier du signal $u(t)$.
On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} t\sin(2nt)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2n}$$

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$b_n = -\frac{1}{n}.$$

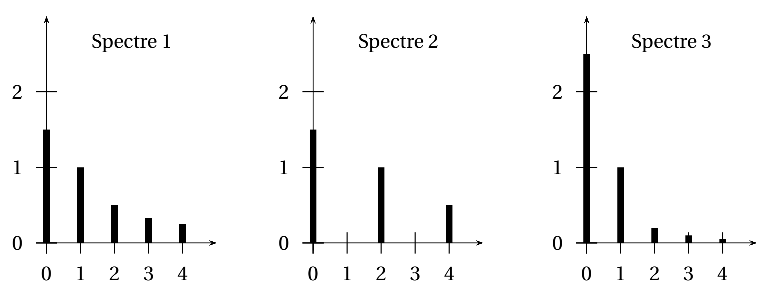
6. Les *amplitudes* d'un signal sont les nombres A_n définis par :

$$A_0 = |a_o| \quad \text{et, pour} \quad n \geqslant 1 \qquad A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}.$$

On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $a_n = 0$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4
Valeur exacte de A_n	......	......	......	......	......
Valeur approchée de A_n à 10^{-2}près	......	......	......	......	......

7. Le spectre d'un signal est un diagramme en barres dont les abscisses sont les entiers $n \geqslant 0$, et dont les ordonnées sont les amplitudes A_n.
On a représenté ci-dessous trois spectres.



a. Expliquer pourquoi le spectre 2 ne peut pas être celui du signal $u(t)$.

b. Expliquer pourquoi le spectre 3 ne peut pas être celui du signal $u(t)$.

FORMULAIRE sur les séries de Fourier.

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

$$s_n(t) = a_o + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \geqslant 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \geqslant 1).$$

➡ Lorsque la fonction f est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \geqslant 1).$$

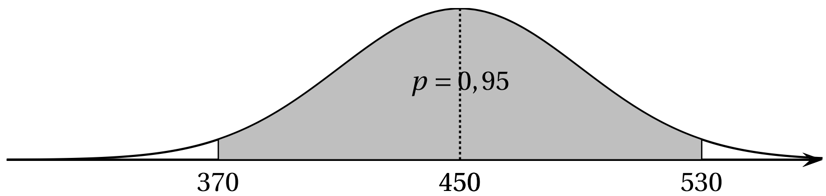
EXERCICE 3 — 4 points

Cet exercice est constitué de deux questions indépendantes.

1. Une urne contient dix boules : sept blanches et trois noires.
Parmi les sept boules blanches, cinq portent le numéro 1 et deux portent le numéro 2.
Parmi les trois boules noires, deux portent le numéro 1 et une porte le numéro 2.
On prélève au hasard une boule dans l'urne.

- **a.** Quelle est la probabilité que ce soit une boule portant le numéro 2 ?
- **b.** On sait que la boule prélevée porte le numéro 2.
  Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une boule noire ?

2. On considère un troupeau comportant un très grand nombre de chevaux.
On choisit au hasard un cheval et on s'intéresse à sa masse M, exprimée en kg.
On admet que la masse M est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.
La densité de la variable aléatoire M est représentée ci-dessous. La zone grisée correspond à une probabilité égale à 0,95.



a. Indiquer sans justifier la valeur de μ.

b. Expliquer pourquoi σ est environ égal à 40 kg.