A. P. M. E. P.

Brevet de technicien supérieur Métropole obligatoire
Informatique de gestion mai 2000

Exercice 1 **4 points**

Les questions 1. *et* 2. *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre*

1. On considère l'ensemble $E = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ et l'application f de E dans E définie par

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3, \quad f(x_3) = x_2.$$

a. Déterminer les antécédents par f de chacun des éléments de l'ensemble E.

b. L'application f est-elle une injection de E dans E ? (Justifier).

c. L'application f est-elle une surjection de E sur E ? (Justifier).

2. On considère le graphe orienté G, de sommets x_1, x_2 et x_3 tel que les successeurs de x_1, x_2 et x_3 sont respectivement $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$.

a. Donner une représentation géométrique de ce graphe.

b. On note M la matrice d'adjacence de G. ( ) On constate que $M = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Expliquer pourquoi la première ligne de M est 0 1 0.

c. On note $\widehat{G}$ la fermeture transitive de G.
On rappelle que $\widehat{G}$ est le graphe obtenu en conservant les sommets de G et en ajoutant, s'ils n'existent pas dans G, les arcs $\left(x_i,\ x_j\right)$ lorsqu'il existe un chemin d'origine x_i et d'extrémité x_j dans le graphe G.

d. Tracer une représentation géométrique de $\widehat{G}$ et vérifier que la matrice d'adjacence $\widehat{M}$ du graphe $\widehat{G}$ est $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

e. Calculer les matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.
Vérifier que $\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$, où $\oplus$ représente l'addition booléenne des matrices.

Exercice 2 **6 points**

Dans une compagnie d'assurance, on a pu constater que sur les 1 200 assurés, 60 avaient envoyé au moins une déclaration de sinistre dans l'année.
On dira dans tout cet exercice que ces 60 dossiers sont de « type DS ».
On prélève au hasard et avec remise n dossiers parmi les 1 200 dossiers des assurés.
X est la variable aléatoire donnant, parmi les n dossiers prélevés, le nombre de dossiers de « type DS ».
Les probabilités demandées seront données sous forme décimale, arrondies à 10^{-2}.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Donner les paramètres de cette loi.

2. Dans cette question, on prend $n = 10$. Calculer les probabilités :

a. pour qu'un seul dossier soit de « type DS » ;

b. pour qu'il y ait, parmi ces 10 dossiers, au moins un dossier de « type DS ».

3. Dans cette question, on prend $n = 60$. On admet que la loi de probabilité X peut être approchée par une loi de Poisson. Soit Y une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

a. Déterminer le paramètre de la loi de Poisson suivie par Y.

b. Quelle est la probabilité $p(Y \geqslant 2)$?

4. Dans cette question, on prend $n = 200$.
On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi normale. Soit Z une variable aléatoire suivant cette loi normale.

a. Déterminer les paramètres de la loi normale suivie par Z.

b. Calculer les probabilités suivantes $p(Z \leqslant 9)$ et $P(Z \geqslant 15)$.

c. Calculer une valeur approchée de $p(X = k)$ revient à calculer $P(k - 0,5 \leqslant Z \leqslant k + 0,5)$, où intervient la correction de continuité.
À l'aide de ce renseignement, calculer une valeur approchée de la probabilité $p(X = m)$, où m est l'espérance mathématique de la variable X.

Exercice 3 **10 points**

Les parties B *et* C *de cet exercice peuvent être traitées indépendamment de la partie* A

Une étude statistique a permis d'établir qu'à partir du début de l'année 1990, le taux des ménages équipés d'un ordinateur dans une ville V est donné approximativement, en fonction du nombre t d'années écoulées depuis le début de l'année 1990, par

$$f(t) = \frac{1}{1 + k\mathrm{e}^{-at}}, \text{ où } k \text{ et } a \text{ sont deux nombres réels positifs.}$$

D'après cette étude, on sait qu'au début de l'année 1990, 20 % des ménages étaient équipés d'un ordinateur et qu'au début de l'année 1999, 40 % des ménages l'étaient.

Partie A

Détermination de k et a.

1. Montrer que k et a sont solutions du système $\left\{\begin{array}{lcl} 1 + k & = & 5 \\ -9a.1 + k\mathrm{e}^{-9a} & = & 2,5 \end{array}\right.$

2. Résoudre ce système, puis donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près de a.

Étude de la fonction *f*

On admet que la fonction f est définie pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{1 + 4\mathrm{e}^{-0,11t}}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote, notée (Δ), dont on donnera une équation.

b. Montrer que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{0,44\mathrm{e}^{-0,11t}}{\left(1 + 4\mathrm{e}^{-0,11t}\right)^2}.$$

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ (placer en particulier les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 20 et 40).

e. Résoudre algébriquement l'équation $f(t) = 0,6$ et faire apparaître sur la figure les traits permettant de visualiser cette résolution.

2. On considère la fonction F, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(t) = \dfrac{1}{0,11}\ln\left(4 + \mathrm{e}^{0,11t}\right)$.

Montrer que F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[7\,;\,9]$, c'est à dire $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_7^9 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie C

Utilisation de résultats de la partie B.

On suppose que $f(t)$ est une approximation satisfaisante, au moins jusqu'en 2010, du taux des ménages équipés d'un ordinateur dans la ville V.
En utilisant cette approximation et des résultats obtenus à la partie B, déterminer :

1. le pourcentage des ménages équipés d'un ordinateur au début de l'année 2010 ;

2. l'année à partir de laquelle 60 % des ménages seront équipés d'un ordinateur ;

3. une valeur approchée du pourcentage moyen des ménages équipés d'un ordinateur entre le début de l'année 1997 et le début de l'année 1999.