BTS Métropole 16 mai 2025

Groupement B1 [1]

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 — 10 points

Pour fabriquer de l'aluminium en feuille on chauffe une plaque d'aluminium à 250 °C puis on la sort du four : c'est alors la phase de refroidissement. On étudie l'évolution de la température de la plaque d'aluminium durant cette phase.
On note $f(t)$ la température de la plaque d'aluminium à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en degré Celsius, et t désigne le nombre de minutes de refroidissement.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Équation différentielle

On sait que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0,25y = 7,5,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0) : y' + 0,25y = 0.$$

   On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}, \quad k \in \mathbb{R}$

2. Soit c un nombre réel.
   On considère la fonction constante g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = c.$$

   Déterminer le réel c pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

1. Aéronautique, Assistance technique d'ingénieur,Bâtiment, Conception et réalisation de carrosseries, Conception et réalisation des systèmes automatiques, Enveloppe des bâtiments : conception et réalisation, Environnement nucléaire, Fluides - énergies - domotique (3 options), Maintenance des systèmes (3 options), Traitement des matériaux (2 options), Travaux publics

4. Déterminer l'expression de la fonction f sachant qu'à l'instant $t = 0$ la température est égale à 250 °C.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = 220\mathrm{e}^{-0,25t} + 30.$$

On admet que $f(t)$ représente la température (en degré Celsius) de la plaque d'aluminium après t minutes de refroidissement.

1. Déterminer la valeur approchée à 0,1 °C de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Quelle est la conséquence pour la courbe représentative de la fonction f ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Déterminer $f'(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Un technicien affirme : « en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés ».
A-t-il raison ? Quelle est la durée nécessaire, arrondie à la seconde, pour que la température de la plaque passe en dessous de 150 °C ?
Les réponses devront être justifiées.

5. Réaliser sur la copie un croquis donnant l'allure de la courbe représentative de la fonction f. Ce croquis devra également faire apparaître les résultats des questions **1** à **4**.

Exercice 2 — 10 points

Partie A. Loi exponentielle

On s'intéresse au temps que doit attendre un client pour être servi à la terrasse d'un café. On admet que ce temps d'attente, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que le temps d'attente moyen d'un client est égal à 4 minutes.
Expliquer pourquoi on a alors $\lambda = 0,25$.

2. Décrire par une phrase l'évènement $(T < 3)$ et déterminer sa probabilité, arrondie à 10^{-3}.

3. Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes ? Arrondir à 10^{-3}.

4. Déterminer, à la seconde près, le temps t tel que : $P(T > t) = 0,1$.

Partie B. Probabilités conditionnelles

Un café propose des boissons chaudes et des boissons froides, qui peuvent être servies en terrasse ou en salle.
On dispose des informations suivantes :

- 60 % des consommations sont servies en terrasse.
  Dans un tiers des cas, il s'agit d'une boisson chaude.
- 40 % des consommations sont servies en salle.
  Parmi elles, les trois quarts sont des boissons chaudes.

On s'intéresse à une consommation choisie au hasard, et on considère les évènements suivants :

T : il s'agit d'une consommation servie en terrasse.

C : il s'agit d'une boisson chaude.

1. Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
2. Déterminer la probabilité $P(T \cap C)$.
3. Montrer que la probabilité que la consommation soit une boisson chaude est égale à $\frac{1}{2}$.
4. Une boisson chaude vient d'être commandée. Un serveur déclare :
   « Elle a davantage de chance d'être servie en salle qu'en terrasse ».
   Le serveur a-t-il raison ? Justifier la réponse.
5. Les évènements T et C sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie C. Intervalle de confiance

La direction d'un café souhaite estimer la proportion p d'étudiants parmi ses clients. Pour cela, elle interroge un échantillon aléatoire de 1 000 clients. Dans cet échantillon, elle compte 525 étudiants.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p d'étudiants.
2. Donner une estimation de la proportion p par un intervalle de confiance avec le niveau de confiance de 90 %.
   On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion avec un niveau de confiance de 90 %
$\left[f - 1,65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,;\, f + 1,65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$

3. Le patron du café affirme :
   « La proportion p est obligatoirement contenue dans l'intervalle de confiance. »
   A-t-il raison ? Justifier.
4. On estime que lorsqu'un étudiant vient au café, sa consommation s'élève en moyenne à 3,50 euros.
   Chaque mois, le café reçoit 5 000 clients.
   La direction du café décide d'accorder une réduction de 10 % aux étudiants.
   En supposant que la proportion p est effectivement contenue dans l'intervalle de confiance, indiquer, sous forme d'un intervalle, le manque à gagner mensuel pour le café.