Brevet de technicien supérieur 16 mai 2017
Géomètre topographe

Exercice 1 **9 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère la courbe plane $\mathscr{C}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& 2(\cos t)^3 \\ y(t) &=& 2(\sin t)^3 \end{array}\right. \qquad t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les fonctions x et y sont périodiques de période 2π.
À quel intervalle peut-on réduire l'étude de la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étudier la parité des fonctions x et y sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
Quelle symétrie peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$? À quel intervalle peut-on réduire l'étude de la courbe ?
3. Exprimer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
À quel intervalle peut-on alors réduire l'étude ?

   On admet de plus que la courbe $\mathscr{C}$ possède une propriété de symétrie par rapport à la première bissectrice (d'équation $y = x$) et que l'étude peut être réduite sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel on a obtenu les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) &=& -6.\sin t.(\cos t)^2 \\ y'(t) &=& 6.\cos t.(\sin t)^2 \end{array}\right.$$

   Étudier le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ et en déduire les variations de x et y sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
5. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A, de paramètre $t = \dfrac{\pi}{4}$.

   Il est admis que la courbe $\mathscr{C}$ a pour tangente l'axe $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$ au point M_0 de paramètre $t = 0$.
6. On donne : $x''\left(\frac{\pi}{4}\right) = y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, montrer que le rayon de courbure à la courbe $\mathscr{C}$ au point A de paramètre $t = v$ est $R = -3$.
On rappelle que la courbure algébrique au point de paramètre t est donnée par :

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^2}.$$

7. Sur le graphique fourni en annexe 1, placer le point A, tracer les deux tangentes de la question 5. et le cercle osculateur Γ au point A en plaçant son centre Ω, sans calcul mais en laissant apparaître les éléments nécessaires à la construction.
Tracer avec précision la courbe $\mathscr{C}$ sur ce même graphique.

Exercice 2 **11 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit L la sphère de centre O et de rayon 1, représentée en annexe 2.

On rappelle les formules de base de la trigonométrie sphérique, avec les notations usuelles où
$a = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB}\right)$, $b = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$ et $c = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ et A, B et C sont des points de Σ.

- $\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos \widehat{A}$
- $\dfrac{\sin a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{\sin b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{\sin c}{\sin \widehat{C}}$
- Aire d'un triangle sphérique : $\left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi\right) \times R^2$

On considère le plan P d' équation $x = y$ et le plan Q d'équation $z = \dfrac{1}{2}$.
L'intersection des plans P et Q est une droite. Cette droite coupe la sphère Σ en deux points A et A_1. On désignera par A celui des deux points dont la longitude est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1. Parmi les propositions suivantes, quelles sont les coordonnées sphériques, notées $\left(r, \theta_{A_1}, \varphi_{A_1}\right)$, du point A_1 ? Aucune justification n'est attendue.

   a. $\left(1 ; \frac{\pi}{4} ; -\frac{3\pi}{4}\right)$ **b.** $\left(1 ; \frac{\pi}{6} ; -\frac{3\pi}{4}\right)$ **c.** $\left(1 ; -\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{6}\right)$ **d.** $\left(1 ; -\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{2}\right)$

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de A_1.
   On considère aussi le point B de Σ de longitude comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, intersection du plan P et du plan équateur et le point C de coordonnées sphériques (1 ; 0 ; 0).
3. Placer les points A, B et C sur la figure donnée en annexe 2.
   On admet ici que les coordonnées cartésiennes des points A, B et C sont :

   $$A\left(\sqrt{6}/4 ; \sqrt{6}/4 ; 1/2\right), \quad B\left(\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2 ; 0\right), \quad C(1 ; 0 ; 0).$$

4. Déterminer les coordonnées sphériques des points A et B.
5. Dans cette question, on souhaite déterminer les éléments caractéristiques du triangle sphérique ABC.
   On donne $\widehat{C} \approx 0,68$ à 10^{-2} près.
   a. Par lecture graphique déterminer a, c et $\widehat{B}$.
   b. Vérifier que $b \approx 0,91$ à 10^{-2} près.
   c. Montrer que $\widehat{A} \approx 1,11$ à 10^{-2} près.

On appelle N le point de Σ de coordonnées cartésiennes (0 ; 0 ; 1).
On considère l'inversion I de pôle N et puissance 4.

6. On note Σ^* la sphère Σ privée du point N.
   L'image de Σ^* par l'inversion I est-elle :

   a. une sphère ? **b.** un plan ? **c.** un cercle ? **d.** une droite ?

7. Déterminer une équation cartésienne de l'image de Σ^* par l'inversion I.
8. Montrer que l'image A′ de A par l'inversion I a pour coordonnées cartésiennes $\left(\sqrt{6} ; \sqrt{6} ; -1\right)$.
9. On donne les coordonnées cartésiennes des images de B et C par l'inversion I :

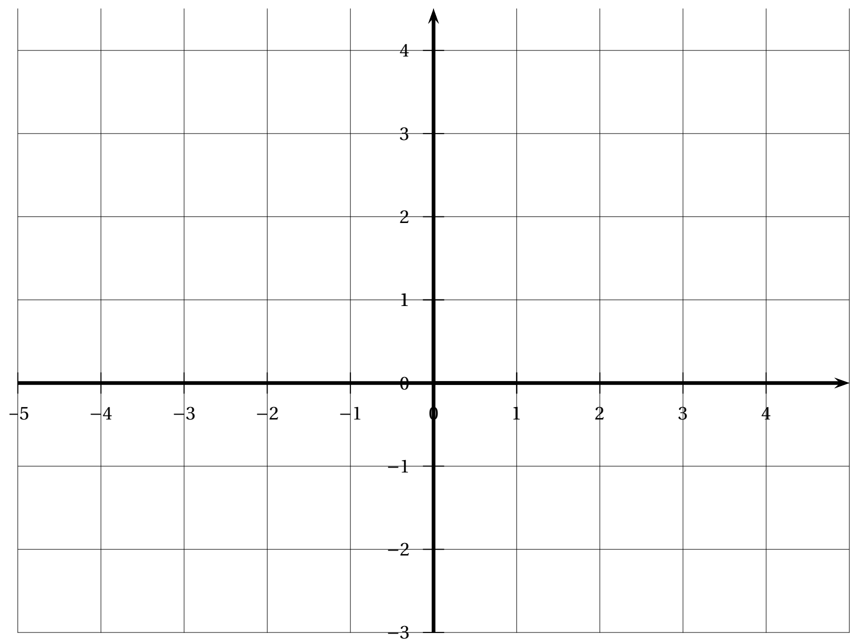
   $$B'\left(\sqrt{2} ; \sqrt{2} ; -1\right) \quad \text{et } C'(2 ; 0 ; -1).$$

   a. Calculer l'aire du triangle sphérique ABC. On arrondira à 10^{-2} près.
   b. Calculer l'aire du triangle plan A′B′C′. On arrondira à 10^{-2} près.

Annexe 1

À rendre avec la copie

Exercice 1 :



Annexe 2

À rendre avec la copie

Exercice 2 :