Brevet de technicien supérieur session 2000 Géomètre topographe

Exercice 1 **6 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
L'unité de mesure d'angle est le radian.
Sur une sphère de centre O :

— deux points A et B déterminent l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ sur le grand cercle passant par A et B ;
— trois points A, B, C déterminent les arcs $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ qui constituent le « triangle sphérique » ABC.

Avec les notations usuelles :

— a désigne la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BOC}}$;
— A désigne la mesure de l'angle formé par les tangentes en A aux arcs $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$.

On rappelle la formule : $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

1. On considère les points A(1 ; 1 ; 1) et $\mathrm{B}\left(0\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 0\right)$.
   Déterminer une équation de la sphère (S), de centre O, passant par A.
   Justifier que B appartient à (S).
   Calculer $\cos\widehat{\mathrm{AOB}}$ et $\sin\widehat{\mathrm{AOB}}$.
2. Soit r une rotation d'axe (OB) et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Déterminer l'image de (S) par r et en déduire que l'image C du point A par r est un point de (S).
   Quelle est l'image par r de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$?
   Que peut-on en déduire :
   — pour la mesure d'angle B ;
   — pour a et c, côtés du triangle sphérique ?
   Calculer b, A et C.

EXERCICE 2 **14 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (unité 1 cm).
Soit I l'inversion de pôle O et de puissance -9.

Partie A

1. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[\mathrm{A_1A_2}]$ avec $\mathrm{A_1}(-1\ ;\ 0)$ et $\mathrm{A_2}(9\ ;\ 0)$.
   Déterminer $I(A_1)$ et $I(A_2)$.
   Montrer que $(\mathscr{C})$ est globalement invariant par I.
2. Soit $(\mathscr{E})$ la conique d'équation $\dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
   Reconnaître la nature de $(\mathscr{E})$. Préciser l'axe focal et les sommets de cette conique.
   Déterminer les points d'intersection C et D de $(\mathscr{E})$ avec l'axe des ordonnées.
3. Représenter $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{C})$ sur un même dessin.

Partie B

Soit $(\mathscr{K})$ la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 5 + 4\cos\theta$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tracer $(\mathcal{K})$ on peut d'abord se restreindre à prendre θ dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.
2. Étudier le sens de variation de ρ sur $[0 ; \pi]$.
   Préciser les tangentes à $(\mathcal{K})$ aux points correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
3. Tracer $(\mathcal{K})$ sur le même dessin que $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{C})$.
   (On placera les points de $(\mathcal{K})$ correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$).

Partie C

Soit M un point du plan et $(r ; \theta)$ un couple de coordonnées polaires de ce point.

1. Donner, en fonction de ρ et θ, les coordonnées cartésiennes de M.
2. $M(\rho ; \theta)$ est maintenant un point de $(\mathcal{E})$.
   Vérifier que ρ et θ sont tels que $[4r\cos\theta + 9]^2 = 25r^2$.
   En déduire que soit $r = r_1(\theta) = \dfrac{-9}{5+4\cos\theta}$, soit $r = r_2(\theta) = \dfrac{9}{5-4\cos\theta}$.
   Dans le premier cas, comment peut-on, géométriquement, traduire la relation entre points de $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{K})$ ayant un même angle polaire θ ?