Brevet de technicien supérieur session 2014
Nouvelle Calédonie Géomètre topographe

Exercice 1 GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE **10 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On note Σ la sphère de centre O et de rayon 1. On fournit en **annexe 1** une représentation de Σ.
Tout point de Σ est repéré par sa longitude θ et sa latitude φ exprimées en radians.

Triangle sphérique

1. Écrire une équation cartésienne de la sphère Σ.
2. On considère le point D de la sphère Σ défini par sa longitude $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et sa latitude $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Calculer ses coordonnées cartésiennes.
3. On considère les points A, B, C déterminés par leurs coordonnées cartésiennes :

$$\text{A}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,0\right),\quad \text{B}(0\,;\,1\,;\,0)\quad \text{et C}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

   a. Montrer que les points A, B et C sont des points de la sphère Σ.
   b. Donner la longitude et la latitude de chacun des points A, B et C.
   c. Placer les points A, B, C et D sur la figure donnée en **annexe 1**.

4. On s'intéresse au triangle sphérique ABC. On utilisera les notations usuelles $\widehat{\text{A}}, \widehat{\text{B}}, \widehat{\text{C}}$, a, b et c pour désigner les angles caractéristiques du triangle sphérique.
   a. Donner les valeurs exactes de a, c et $\widehat{\text{B}}$.
   b. Déterminer les valeurs arrondies à 10^{-3} de b et $\widehat{\text{A}}$.
   c. On donne $\widehat{\text{C}} \approx 0,857$. Déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire du triangle sphérique ABC.

Inversion

On rappelle que l'image M' d'un point M par l'inversion de pôle Ω et de rapport k est définie par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}.$$

On considère I l'inversion de pôle B et de puissance 1.

5. Déterminer la nature de P, image de la sphère Σ, privée du point B, par l'inversion I.
6. Donner une équation de P.
7. Quelles sont les images des points C et D par l'inversion I ?
8. Montrer que le point $\text{A}'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$ est l'image du point A par l'inversion I.
9. On considère la droite Δ : $\left\{\begin{array}{l c l} y & = & \frac{1}{2}\\ z & = & 0\end{array}\right.$
   Montrer que l'image de la droite Δ par l'inversion I est le grand cercle passant par les points A et B et privé du point B.

Exercice 2 ÉTUDE D'UNE ÉPICYCLOÏDE **10 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 3\cos(t)-\cos(3t) \\ y(t) & = & 3\sin(t)-\sin(3)t \end{array}\right. \qquad t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$ de $\mathscr{C}$.
Le but de cet exercice est d'étudier et de tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Détermination de l'intervalle d'étude

1. Que peut-on dire des points $M(t+2\pi)$ et $M(t)$? À quel intervalle peut-on restreindre l'étude de $\mathscr{C}$?
2. Pour $t \in [-\pi\ ;\ \pi]$, que peut-on dire des points $M(-t)$ et $M(t)$?
   À quel intervalle peut-on restreindre l'étude de $\mathscr{C}$?
3. Calculer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
4. On nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe décrite par $M(t)$ lorsque t décrit l'intervalle $I = \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Comment la courbe $\mathscr{C}$ se déduit-elle de la courbe $\mathscr{C}_1$?

Étude de $\mathscr{C}_1$ pour $t \in I = \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

5. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. On admet que $x'(t)$ et $y'(t)$ se factorisent de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 6\sin(t)\cos(2t) \\ y'Ct) & = & 6\sin(t)\sin(2t) \end{array}\right.$$

   Étudier le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in I$ puis dresser le tableau de variations complet des fonctions x et y sur l'intervalle I.
7. En admettant que la tangente au point $M(0)$ est horizontale, préciser les autres points de $\mathscr{C}_1$ ayant des tangentes parallèles aux axes de coordonnées.

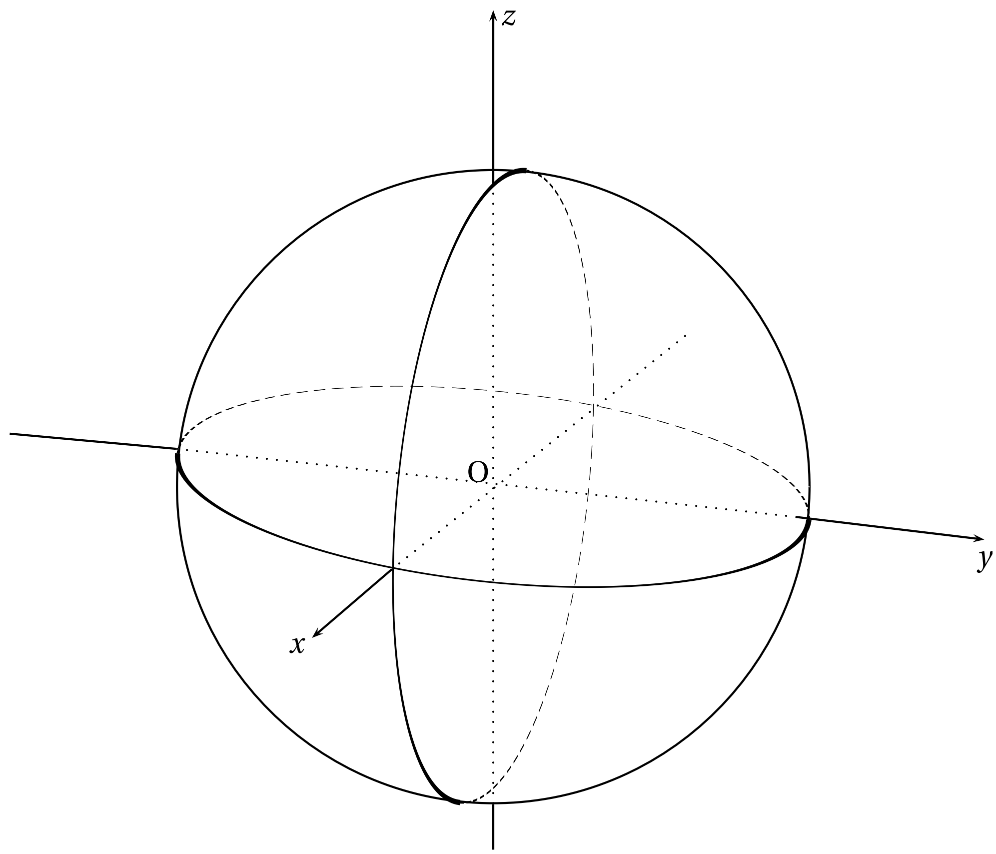
Cercle de courbure en un point de $\mathscr{C}$

8. On admet que le rayon de courbure au point A de $\mathscr{C}$ de paramètre $t = \dfrac{\pi}{2}$ est égal à 3.
   On note Γ le cercle de courbure au point A.
   Montrer que $-\vec{\imath}$ est un vecteur unitaire directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
9. Préciser le vecteur unitaire $\vec{n}$ tel que le repère $\left(\text{A}\ ;\ -\vec{\imath},\ \vec{n}\right)$ soit orthonormal direct.
   En déduire que le cercle Γ pour centre $\Omega(0\ ;\ 1)$.

Tracé de la courbe

10. Dans le repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ donné en annexe 2 :
    a. Placer les points A, $M(0)$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, et représenter les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.
    b. Tracer le cercle Γ.
    c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. Utiliser une couleur différente pour la partie $\mathscr{C}_1$ de la courbe.

Annexe 1 : à rendre avec la copie



Annexe 2 : à rendre avec la copie