Brevet de technicien supérieur session 2015
Géomètre topographe

Exercice 1 **10 points**

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Tout point M du plan, distinct du point O, peut être repéré par un système de coordonnées polaires $(\rho,\ \theta)$ tel que $\overrightarrow{\text{O}M} = \rho\overrightarrow{u_\theta}$ où $\rho = \text{O}M$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ est un vecteur unitaire.

Partie A : Étude d'une cardioïde

On considère la courbe $\mathcal{F}$ définie par son équation polaire :

$$\rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que l'on peut réduire l'étude à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$. On précisera les transformations géométriques à opérer pour obtenir toute la courbe.
2. Etudier les variations de la fonction ρ sur $[0\ ;\ \pi]$.
3. Compléter le tableau de valeurs fourni en annexe pour θ égale à $0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ et π.
4. Déterminer le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{F}$ au point D de paramètre $\theta = 2\pi/3$.

   On rappelle la formule : $R = \dfrac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$

5. Les points A, B, C, D et E sont les points d'angle polaire respectif 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$ et π.

   Tracer la courbe $\mathcal{F}$ avec ses tangentes en A, B, C, D et E ainsi que le cercle osculateur Γ à $\mathcal{F}$ au point D.

Partie B : Inverse de la cardioïde

On rappelle que l'image M' d'un point M par l'inversion de pôle Ω et de puissance k est définie par

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}.$$

On considère I, l'inversion de pôle O et de puissance 3.

1. **a.** Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A et B.

   b. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A′ et B′, images respectives de A et B par I.
2. Déterminer la nature de Γ', image du cercle osculateur Γ en D.

   On appelle $\mathcal{H}$ la courbe, image de $\mathcal{F}$ par l'inversion I.

   On admet que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont Γ' est une asymptote qui peut être définie par une équation polaire $\rho = f(\theta)$ telle que $f(-\theta) = f(\theta)$.
3. Reconnaître parmi les quatre représentations graphiques suivantes la courbe $\mathcal{H}$. On ne demande pas de justification.

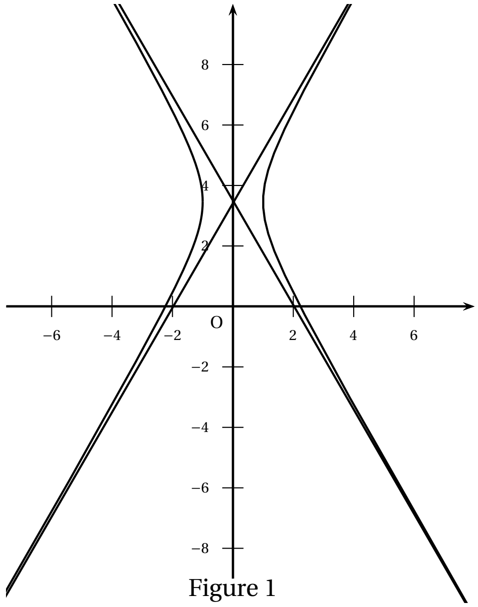

Figure 1

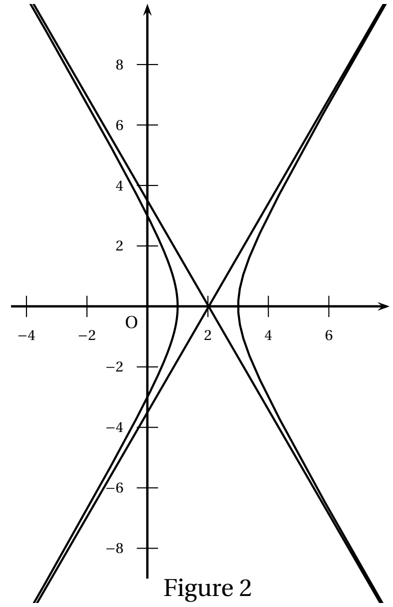

Figure 2

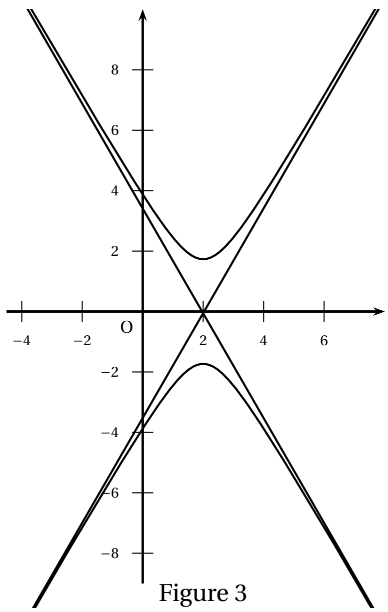

Figure 3

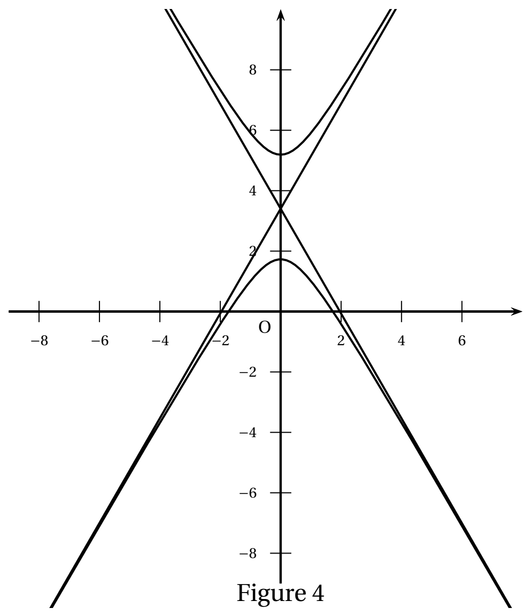

Figure 4

Exercice 2 **10 points**

Partie A

Cette partie propose un QCM. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse exacte rapporte un point.
L'absence de réponse, une réponse inexacte ou plusieurs réponses n'apportent ni n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

Reporter sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère la sphère (S) de centre O et de rayon 1 ainsi que le plan (P) d'équation cartésienne $z = \frac{1}{2}$.
Le cercle intersection de (S) et (P) a pour centre et rayon :

a. Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et de rayon 1

b. Le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. Le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. Le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

2. On considère la série statistique suivante :

Valeur	6	7	9	15	16	18
Effectif	1	6	5	1	2	7

Le couple (moyenne ; écart-type) arrondi à $0,01$ près est :

a. (3,64 ; 2,34)

b. (12,09 ; 4,88)

c. (12,09 ; 3,42)

d. (9,57 ; 4,88)

3. Dans un repère orthonormé du plan, la conique d'équation réduite $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ est :

a. Une parabole

b. Une ellipse

c. Une hyperbole

d. Un couple de droites sécantes

4. La conique de la question **3.** admet pour foyer F. Les coordonnées de F sont :

a. (0 ; 4)

b. (4 ; 0)

c. $(0\ ;\ \sqrt{34})$

d. $(\sqrt{34}\ ;\ 0)$

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
En **annexe**, on donne une représentation en perspective de la sphère Σ de centre O et de rayon 1 (figure 1) qui sera rendue avec la copie.

On se place sur la sphère Σ sur laquelle tout point M peut être repéré par ses coordonnées sphériques $(R\ ;\ \theta\ ;\ \varphi)$ où $R=\text{O}M$, θ est la longitude et φ est la latitude du point M.
Les réponses seront éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

On rappelle les formules de base de la trigonométrie sphérique :

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\widehat{A}$$

$$\frac{\sin a}{\sin\widehat{A}}=\frac{\sin b}{\sin\widehat{B}}=\frac{\sin c}{\sin\widehat{C}}$$

Aire d'un triangle sphérique : $\left(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}-\pi\right)R^2$

On considère les points A, B, C et D de la sphère déterminés par leurs coordonnées sphériques :

$$\text{A}(1\ ;\ 0\ ;\ 0),\quad \text{B}\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right),\quad \text{C}\left(1\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right)\quad\text{et}\quad \text{D}\left(1\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right)$$

1. Placer les points sur la figure donnée en annexe.

2. Donner les coordonnées cartésiennes des points A et C.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OC}}$. En déduire la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{AC}}$.
4. Déterminer les deux autres longueurs du triangle sphérique ABC.
5. **a.** Déterminer l'angle $\widehat{B}$ du triangle sphérique ABC.

   b. Expliquer pourquoi l'angle $\widehat{B}$ n'est pas égal à $\frac{\pi}{2}$, alors que A et B sont sur le même méridien et B et C sont sur le même parallèle.
6. **a.** Déterminer l'angle $\widehat{C}$ du triangle sphérique ACD.

   b. Les points A, C et D sont-ils sur le même grand cercle ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 1

Nom du point	A	B	C	D	E
θ	0	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	π
ρ'					
ρ					

EXERCICE 2 : représentation en perspective de l'exercice 2, partie B

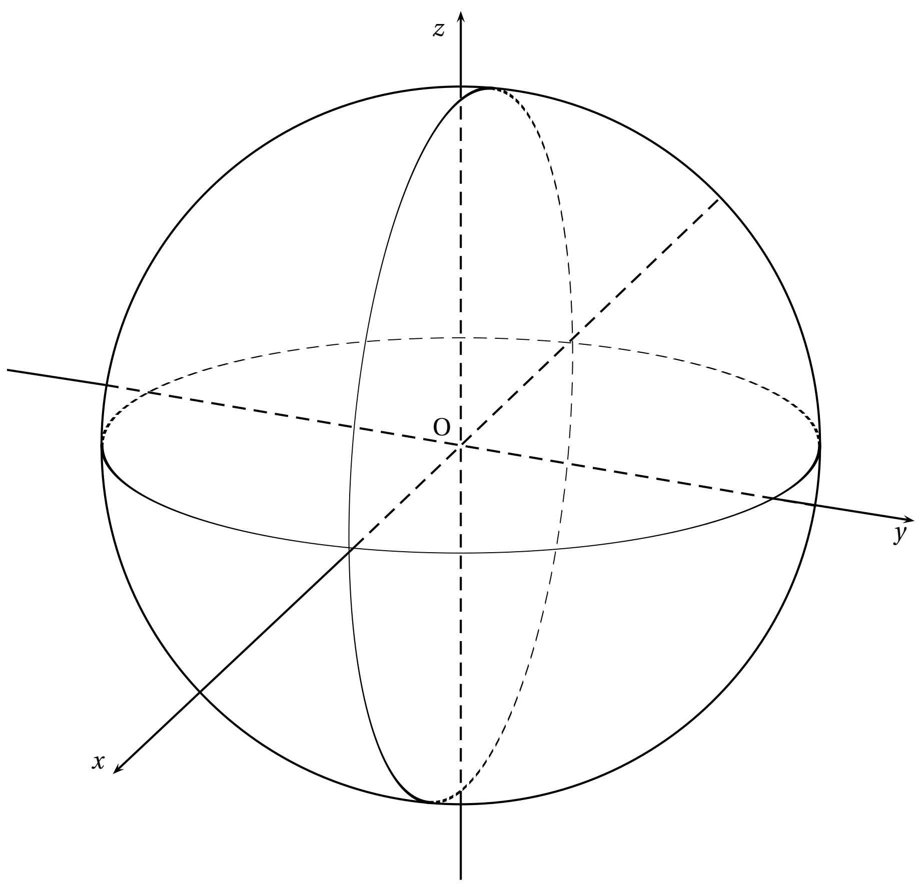

Figure 1