Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2008

Exercice 1 **6 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E)\quad :\quad y'' - y = (-4x-6)\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$(E_0)\quad :\quad y'' - y = 0.$$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x}$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2+4x+3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :
$$f(x) = 3 + x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$
2. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

   a. Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

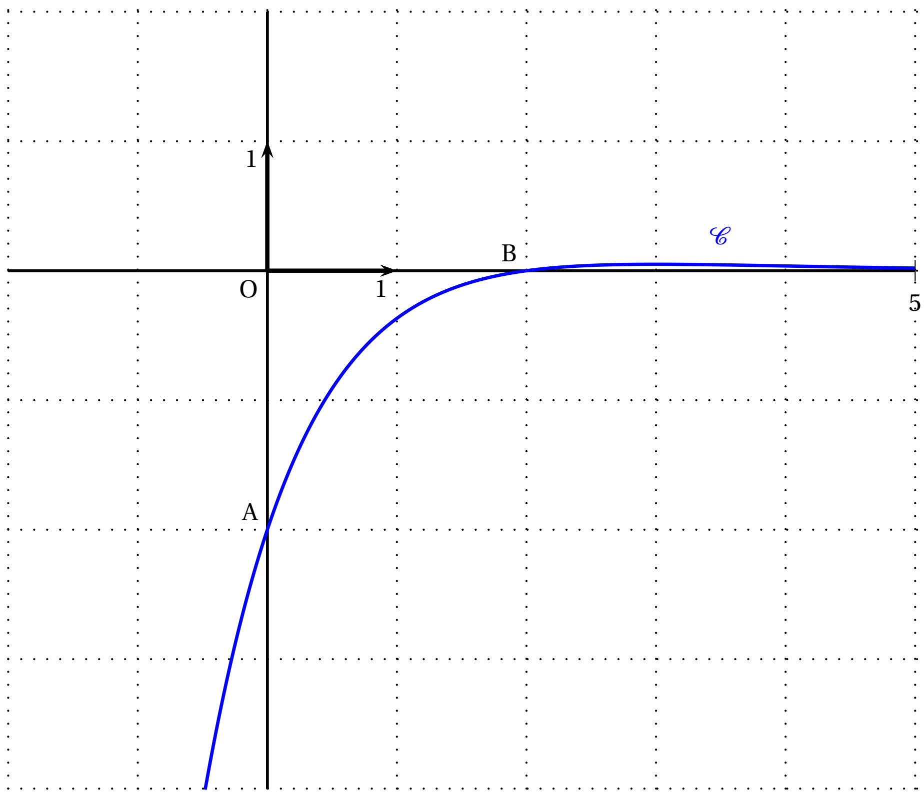
Exercice 2 **5 points**

A. Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont deux nombres réels.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 2 cm est donnée ci-dessous.



1. La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A et B de coordonnées respectives $(0\,;\,-2)$ et $(2\,;\,0)$.
   Déterminer les nombres réels a et b.

Dans la suite de cet exercice, on admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Établir le tableau de variations de f.
   Dans ce tableau, on ne demande pas de faire figurer les limites.

B. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = -1 - \mathrm{e}^{-2}$.
2. **a.** En déduire la valeur exacte de l'aire S en cm^2 de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées et la courbe $\mathscr{C}$ entre les points A et B d'abscisses respectives 0 et 2.
   b. Donner la valeur approchée de S arrondie à 10^{-2}.

Exercice 3 **9 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 centimètres.
On appelle courbe de Bézier définie par les points de définition $A_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,\,n}(t)\overrightarrow{\mathrm{O}A_i} \text{ où } B_{i,\,n}(t) = \mathrm{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i}.$$

A. Construction d'une courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$

Dans cette question, on s'intéresse à la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ définie par les quatre points de définition A(0 ; 1) ; B(2 ; 1) ; C(0 ; 2) ; D(0 ; 4), dans cet ordre.

1. Démontrer que, pour tout t de $[0\,;\,1]$, $B_{1,\,3}(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$.
2. On admet que, pour tout t de $[0\,;\,1]$
   $B_{0,\,3}(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$; $B_{2,\,3}(t) = 3t^2 - 3t^3$ et $B_{3,\,3}(t) = t^3$.
   En déduire qu'un système d'équations paramétriques de la courbe $\mathscr{C}_1$ est :

   $$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y & = & g_1(t) & = & 1 + 3t^2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

3. Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.
4. Préciser les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_1$ où les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées.
5. Montrer que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A.
6. Tracer la tangente (AB) et la courbe $\mathscr{C}_1$ dans le repère donné au début de l'énoncé.

B. Étude géométrique et construction d'une courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$

On considère la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ définie par les trois points de définition E(−2 ; 0) ; F(−3 ; 1) et A(0 ; 1) dans cet ordre.

Les deux résultats suivants n'ont pas à être démontrés.

- Un système d'équations paramétriques de la courbe $\mathscr{C}_2$ est :

  $$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_2(t) & = & -2 - 2t + 4t^2 \\ y & = & g_2(t) & = & 2t \quad - t^2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

- Le tableau de variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f_2'(t)$	-2	$-$	0	$+$	6
$f_2(t)$	-2	$\searrow$	$-2,25$	$\nearrow$	0
$g_2'(t)$	2		$+$		0
$f_2(t)$	0		$\nearrow$		1

1. Construire sur la figure de la partie A le point M_0 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_0} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$, le point M_1 tel que $\overrightarrow{\text{F}M_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{FA}}$ et le point R tel que $\overrightarrow{M_0R} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{M_0M_1}$.

2. Calculer les coordonnées des points M_0, M_1 et R.

3. Montrer que le point R est le point de la courbe $\mathscr{C}_2$ de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

4. Montrer que la droite (AF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point A.

5. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente au point A.

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ sur la même figure que la courbe $\mathscr{C}_1$.