Brevet de technicien supérieur
Chimiste session 2016

Exercice 1 **12 points**

L'entreprise Aubonne fabrique en grande série des fioles de volume théorique 12 mL destinées à être utilisées dans un laboratoire.

Partie A :

Dans cette partie, les résultats seront donnés arrondis à 10^{-2}

Sur l'ensemble de la production, on prélève de façon aléatoire 500 fioles (prélèvement non exhaustif) dont les volumes en mL se répartissent dans les 10 classes du tableau suivant :

Classes en mL	[11,5 ; 11,6[	[11,6 ; 11,7[	[11,7 ; 11,8[	[11,8 ; 11,9[	[11,9 ; 12,0[
Effectifs	11	27	53	85	104

Classes en mL	[12,0 ; 12,1[	[12,1 ; 12,2[	[12,2 ; 12,3[	[12,3 ; 12, 4[	[12,4 ; 12,5[
Effectifs	97	60	30	18	15

1. Donner les valeurs de la moyenne m et de l'écart-type s de cette série.

   On pourra prendre pour représentant de chaque classe son milieu, par exemple $11,55$ pour la classe [11,5 ; 11,6[.

2. Soit X la variable aléatoire qui à toute fiole associe son volume en mL.

   On admet que X suit la loi normale de moyenne 12 et d'écart-type $0,2$.

   a. Calculer la probabilité $P(X \leqslant 11,8)$.

   b. Justifier, éventuellement à l'aide d'un graphique, que pour tout h réel positif, $P(12-h \leqslant X \leqslant 12+h) = 1-2P(X \leqslant 12-h)$.

   Donner alors la probabilité $P(11,8 \leqslant X \leqslant 12,2)$ à partir de celle calculée à la question précédente.

3. Calculer le nombre h tel que $P(12-h \leqslant X \leqslant 12+h) = 0,85$.

Partie B :

Un processus de contrôle de la conformité des fioles a été mis au point par l'entreprise.
On s'intéresse dans cette partie aux risques d'erreurs de ce contrôle et on suppose que la proportion p de fioles conformes est égale à $0,85$.
On prélève une fiole au hasard dans l'ensemble de la production.
On note :

C l'évènement « la fiole prélevée est conforme » ; on a donc $P(C) = 0,85$.

A l'évènement « la fiole prélevée est acceptée par le contrôle ».

Une étude préliminaire a permis d'estimer les risques d'erreurs de ce contrôle :

— la probabilité de refuser une fiole sachant qu'elle est conforme est $0,05$.
On a donc $P_C\left(\overline{A}\right) = 0,05$.

— la probabilité d'accepter une fiole sachant qu'elle n'est pas conforme est $0,1$:
On a donc $P_{\overline{C}}(A) = 0,1$.

Pour les questions suivantes, on pourra faire un arbre de probabilités.

1. Déterminer la probabilité qu'une fiole soit acceptée sachant qu'elle est conforme.

2. Déterminer la probabilité qu'une fiole soit acceptée par le contrôle.

3. Déterminer la probabilité qu'une fiole ne soit pas conforme sachant qu'elle a été acceptée par le contrôle. (Arrondir le résultat au millième).

Partie C

À l'occasion d'une commande, un laboratoire reçoit des fioles de l'entreprise, laquelle lui assure que les fioles ont bien une contenance de 12 mL. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la commande reçue, avec la valeur $\mu = 12$ annoncée par l'entreprise. Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, il effectuera un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 100 fioles prises dans le lot reçu.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à un tel prélèvement, associe le volume moyen des 100 fioles.

Construction du test

À l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 12$, on oppose l'hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 12$.

Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 12 et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} = 0,02$.

1. En se plaçant sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} du réel h tel que la probabilité $P\left(\mu - h \leqslant \overline{X} \leqslant \mu + h\right)$ soit égale à 0,95.

2. En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque de 5 %.

Énoncer alors la règle de décision du test.

3. Le laboratoire, après avoir prélevé 100 fioles, constate un volume moyen de 11,79 mL sur cet échantillon.

Appliquer le test à l'échantillon puis conclure.

Partie D

(Les résultats seront écrits sur la feuille de réponses donnée en annexe)

L'entreprise souhaite évaluer le rendement Y, nombre de fioles produites par la machine par minute, en fonction de deux paramètres : T (température de travail du verre donnée en degré Celsius) et P (pression de soufflage du verre donnée en bar).

Les niveaux extrêmes pris en compte sont :

T (température de travail du verre) : 1 050 °C à 1 200 °C

P (pression de soufflage du verre) : 20 bars à 30 bars

X_1 est le facteur représentant la température de travail du verre et X_2 celui représentant la pression de soufflage du verre.
On a :

$X_1 = -1$ pour $T = 1050$ °C et $X_1 = 1$ pour $T = 1200$ °C

$X_2 = -1$ pour $P = 20$ bars et $X_2 = 1$ pour $P = 30$ bars.

Le plan complet est formé de 4 combinaisons possibles, les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Expérience	X_1	X_2	Y (nombre de fioles produites par minute)
N° 1	−1	−1	75
N° 2	1	−1	85
N° 3	−1	1	80
N° 4	1	1	70

On considère que l'expression du modèle est de la forme :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_{12} X_1 X_2 + \epsilon \quad \text{où } \epsilon \text{ est l'erreur commise.}$$

1. Compléter la matrice des expériences et des effets construite selon l'algorithme de Yates, ci-jointe en Annexe 1 ; calculer une estimation ponctuelle de chacun des coefficients du modèle.
2. **a.** Donner l'expression du modèle $Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_{12} X_1 X_2 + \epsilon$.

   b. À l'aide de ce modèle, quel rendement peut-on prévoir pour une température de 1 100 °C et une pression de 27 bars ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-1}.

Exercice 2 **8 points**

Partie A

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : « la vitesse de refroidissement d'un corps chaud inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant. »
On appelle T_0 la température (en °C) du milieu ambiant, $f(t)$ la température (en °C) d'un produit chimique à l'instant t (en min).
D'après la loi énoncée, f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' = \alpha\left(y - T_0\right)$$

où y est une fonction de variable t définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$, y' sa fonction dérivée et α un coefficient de proportionnalité (avec $\alpha \neq 0$).

1. Résoudre sur $[0~;~+\infty[$ l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' - \alpha y = 0$.
2. Déterminer un réel c tel que la fonction h constante définie sur $[0~;~+\infty[$ par $h(f) = c$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Dans une pièce où la température est $T_0 = 20$ °C, une personne verse dans un récipient un produit chimique dont la température initiale est 80 °C.
   Montrer que la température du produit à l'instant t vérifie : $f(t) = 60\mathrm{e}^{\alpha t} + 20$, où α est le coefficient de proportionnalité défini précédemment.
5. Sachant que 2 minutes plus tard, le produit est à 60 °C.

   a. Déterminer par le calcul algébrique la valeur exacte de α.

   b. Vérifier que $\alpha \approx -0,2$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = 60\mathrm{e}^{-0,2t} + 20.$$

La représentation graphique C_f de f dans un repère orthogonal est donnée en annexe 2.

1. Interpréter l'ordonnée du point de C_f d'abscisse 0.
2. **a.** À l'aide du graphique, déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Interpréter ce résultat : à quoi correspond-il dans le contexte de la partie A ?

3. Soit g la fonction définie par $g(t) = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_{t-5}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ où $t \geqslant 5$.

g désigne la température mesurée par un appareil plongé dans le corps.

a. Calculer $g(t)$.En donner une interprétation.

b. Compléter le tableau de valeurs $\left(\text{on arrondira à } 10^{-1}\right)$ fourni en **Annexe 2** puis tracer la courbe de g sur le graphique donné dans cette même annexe.

Quelle remarque peut-on faire ?

Annexe 1 :
À rendre avec la copie

Exercice 1 - Partie D Feuille des réponses à joindre à la copie

1. Matrice des effets :

Expérience	Moyenne	X_1	X_2	$X_1 X_2$	Y (nombre de fioles produites par minute)
Nº 1		-1	-1		75
Nº 2		1	-1		85
Nº 3		-1	1		80
Nº 4		1	1		70
Effets	a_0	a_1	a_2	a_{12}	

Calcul des estimations ponctuelles des coefficients du modèle :
On précisera le calcul effectué pour a_0.

$a_0 \approx$ ……….

$a_1 \approx$ ……….

$a_2 \approx$ ……….

$a_{12} \approx$ ……….

2. **a.** Expression du modèle :
$Y \approx$ ……………………………………………………………………

b. Pour $T = 1\,100$ °C, le niveau est …….
Pour $P = 27$ bars, le niveau est …….

Donc le rendement prévu pour une température de 1 100 °C et une pression de 27 bars est :
$Y \approx$ ……………………………………………………………………

Annexe 2 :
À rendre avec la copie

Exercice 2 :

Représentation graphique C_f de f

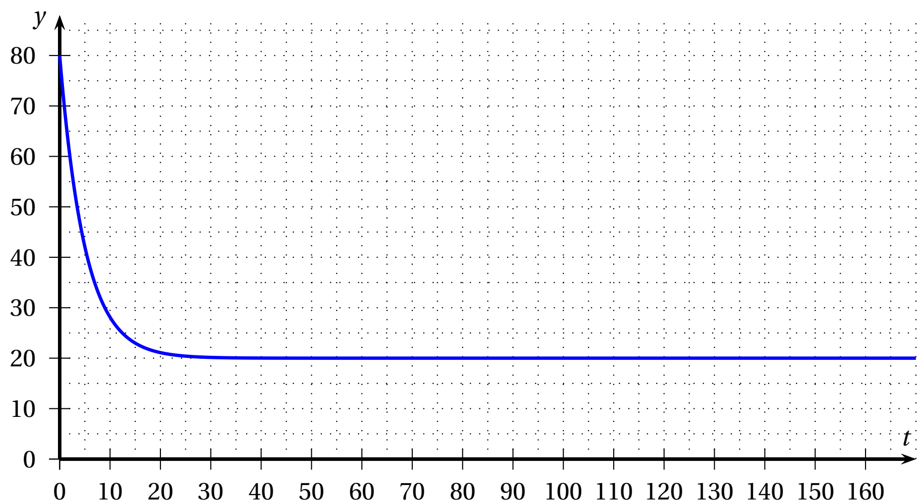

Tableau de valeurs à remplir

t	5	10	15	20	25	50	100	150
$g(t)$								