Brevet de technicien supérieur Chimiste session 2000

Exercice 1 **13 points**

On se propose d'étudier le système de réactions successives suivant : A → B → C.
On appelle $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les concentrations respectives des produits A, B et C à l'instant t exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, on a les concentrations initiales : $x(0) = a$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$.
Les lois de la cinétique chimique montrent que x, y et z sont solutions sur $[0\ ;\ +\infty[$ du système (S) :

$$\left\{\begin{array}{rcll}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & -k_1 x & (1)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & k_1 x - k_2 y & (2)\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} & = & k_2 y & (3)\end{array}\right.$$

où k_1 et $k2$ sont deux nombres réels distincts.

Première partie

1. Résoudre l'équation différentielle (1).
   Déterminer la solution de (1) qui vérifie la condition $x(0) = a$.
2. **a.** Montrer que les solutions y du système (S) vérifient l'équation différentielle

   $$(4) : \qquad y' + k_2 y = a k_1 \mathrm{e}^{-k_1 t}.$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (4).
   Déterminer la solution de (4) qui vérifie la condition $y(0) = 0$.
3. **a.** Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$.
   b. En déduire à l'aide des conditions initiales, la solution z du système (S).

Deuxième partie

On a réalisé une expérience du type A → B → C, à une température fixe et on a obtenu les résultats suivants sur les concentrations du produit A :

t_i (en min)	0	0,5	1	2	4,5	6	7
$x_i = x(t_i)$ (en mol·L^{-1})	2	1,213	0,736	0,271	0,022	0,005	0,002

On pose : $X = \ln x$.

1. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant en donnant des résultats arrondis à 10^{-2} près :

t_i (en min)	0	0,5	1	2	4,5	6	7
$X_i = \ln x_i$							

   b. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation de la série statistique $(t_i\ ;\ X_i)$.
   Un ajustement affine de X en t par la méthode des moindres carrés est-il justifié ?

2. **a.** Donner une équation de la forme $X = \alpha t + \beta$ de la droite de régression de X en t par la méthode des moindres carrés.
   On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des coefficients α et β.
   b. Sachant que l'étude théorique montre que pour tout $t \in [0~;~+\infty[$, on a $x(t) = a\mathrm{e}^{-k_1 t}$ et que $x(0) = 2$, déterminer une valeur approchée de k_1 à 10^{-2} près.
   On admet pour la suite que : $a = 2$; $k_1 = 1$; $k_2 = 0,5$.

Troisième partie

On considère les fonctions x, y et z définies sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} \qquad y(t) = 4\left(\mathrm{e}^{-O,5t} - \mathrm{e}^{-t}\right) \qquad z(t) = 2\left(1 - 2\mathrm{e}^{-0,5t} + \mathrm{e}^{-t}\right).$$

On appelle $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
(Les unités graphiques sont : 2 cm pour l'unité en abscisse et 5 cm pour l'unité en ordonnée).

1. La courbe $\mathscr{C}_1$ est tracée sur la feuille donnée en annexe.
   En déduire le tableau de variation de la fonction x.
2. Étudier les variations de la fonction y.
   On appelle t_M la valeur de t pour laquelle y admet un maximum y_M. Déterminer les valeurs exactes de t_M et de y_M.
   Dresser le tableau de variation de y.
3. **a.** Montrer que $\mathscr{C}_3$ admet une asymptote Δ.
   b. Étudier les variations de z et dresser son tableau de variation.
4. Tracer la droite Δ et les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
5. On appelle τ l'instant où les concentrations des produits A et B sont égales.
   Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de τ exprimé en minute.

Exercice 2 **7 points**

Dans la fabrication de comprimés effervescents , il est prévu que chaque comprimé doit contenir 1 625 mg de bicarbonate de sodium. Afin de contrôler la fabrication de ces médicaments, on a prélevé un échantillon de 150 comprimés et on a mesuré la quantité de bicarbonate de sodium pour chacun d'eux. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Classes	[1 610 ; 1 615[	[1 615 ; 1 620[	[1 620 ; 1 625[	[1 625 ; 1 630[	[1 630 ; 1 635[
Effectifs	7	8	42	75	18

1. En convenant que les valeurs mesurées sont regroupées au centre de chaque classe, calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne m et de l'écart type s de cet échantillon.
2. À partir des résultats obtenus pour cet échantillon, assimilé à un échantillon non exhaustif, donner les estimations ponctuelles $\hat{M}$ et $\hat{\sigma}$ de la moyenne M et de l'écart type σ de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population (formée de l'ensemble de tous les comprimés fabriqués et supposée très grande).
   Dans la question suivante on prendra pour valeur de σ son estimation $\hat{\sigma}$.
3. On appelle $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille $n = 150$ associe la quantité moyenne de bicarbonate de sodium de cet échantillon.

a. $\overline{X}$ peut-elle être approchée par une loi classique ? Si oui, laquelle ? Donner ses paramètres.

b. Déterminer un intervalle de confiance de la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population avec le coefficient de confiance 95 %.

Calculer l'amplitude de cet intervalle et interpréter le résultat.

c. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon prélevé pour connaître avec le coefficient de confiance 95 % la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population à 1 mg près ?

Annexe