BTS 2013 – Correction

Exercice 1 : (9 points)

Partie I – Résolution du système $y' + 0{,}03y = 0{,}75$

1. On obtient $x(t) = Ce^{-k_1 t}$ avec C un réel or $x(0) = a \Leftrightarrow Ce^0 = a \Leftrightarrow C = a$ donc $x(t) = ae^{-k_1 t}$

2. $y' = -k_2 y + k_1 x \Leftrightarrow y' = -k_2 y + k_1 a e^{-k_1 t} \Leftrightarrow y' + k_2 y = k_1 a e^{-k_1 t}$

3. a) $g(t) = \alpha a e^{-k_1 t}$ est solution ssi $g'(t) + k_2 g(t) = k_1 a e^{-k_1 t}$. On a $g'(t) = -k_1 \alpha a e^{-k_1 t}$ donc :
$g'(t) + k_2 g(t) = -k_1 \alpha a e^{-k_1 t} + k_2 \alpha a e^{-k_1 t} = (k_2 - k_1)\alpha a e^{-k_1 t}$
or $(k_2 - k_1)\alpha a e^{-k_1 t} = k_1 a e^{-k_1 t}$ ce qui nous donne $\alpha = \dfrac{k_1}{k_2 - k_1}$

b) $y' + k_2 y = 0 \Leftrightarrow y' = -k_2 y.$ donc $y_0 = Ce^{-k_2 t}$
La solution générale est $y = y_0 + g(t) = Ce^{-k_2 t} + \dfrac{k_1}{k_2 - k_1} a e^{-k_1 t}$

4. $y(0) = 0 \Leftrightarrow C.1 + \dfrac{k_1}{k_2 - k_1} a.1 = 0 \Leftrightarrow C = -a\dfrac{k_1}{k_2 - k_1}$ Ce qui nous donne :
$y(t) = -a\dfrac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_2 t} + \dfrac{k_1}{k_2 - k_1} a e^{-k_1 t} = a\dfrac{k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$

Partie 2 – Etude de la fonction $f(t) = a(e^{-0{,}5t} - e^{-t})$

1. $\lim\limits_{t \to +\infty}(-0{,}5t) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty}(e^{-0{,}5t}) = \lim\limits_{t \to +\infty}(e^{-t}) = 0$ d'où $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = a(0 - 0) = 0$

2. ***a.*** $f'(t) = a(-0{,}5e^{-0{,}5t} + e^{-t}) = a \times e^{-0{,}5t}(-0{,}5 + e^{-0{,}5t}) = ae^{-0{,}5t}(-0{,}5 + e^{-0{,}5t})$

b. Un extremum existe quand la dérivée s'annule : $f'(t) = 0$.
Or $\forall t \in [0; +\infty[$ $e^{-0{,}5t} > 0$ & $a > 0$ donc $\forall t \in [0; +\infty[$
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}5 + e^{-0{,}5t_0} = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}5t_0} = 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}5t_0 = ln(0{,}5) \Leftrightarrow -0{,}5t_0 = -ln2$
D'où $t_0 = 2ln2$

c. $f(2ln2) = a(e^{-0{,}5 \times 2ln2} - e^{-2ln2}) = a\left(e^{-ln2} - e^{ln2^{-2}}\right) = a\left(e^{ln2^{-1}} - 2^{-2}\right) = a(2^{-1} - 2^{-2})$
$= a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = a \times \frac{1}{4} = \frac{a}{4}$

Partie 3 – détermination des différentes concentrations

1. $a = 0{,}2$ mol.L^{-1}.

2. $f(t) + h(t) + z(t) = 0{,}2 \Leftrightarrow z(t) = 0{,}2 - \left(f(t) + h(t)\right)$

à $t = 0$: $z(0) = 0{,}2 - (0{,}2 + 0) = 0$

à $t = 2ln2$: $z(2ln2) = 0{,}2 - (0{,}1 + 0{,}05) = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$

à $t = 3$: $z(2ln2) = 0{,}2 - (0{,}035 + 0{,}045) = 0{,}2 - 0{,}08 = 0{,}12$

Exercice 2 : (11 points)

Partie I

1. Soit $X_1 \leadsto \mathcal{N}(42;0{,}17)$

Soit la variable aléatoire $T \leadsto \mathcal{N}(0;1)$ telle que : $T = \dfrac{X_1 - 42}{0{,}17} \Leftrightarrow X_1 = 0{,}17T + 42$

$$P(41{,}6 \leqslant X_1 \leqslant 42{,}4) = P(41{,}6 \leqslant 0{,}17T + 42 \leqslant 42{,}4) = P\left(-\frac{0{,}4}{0{,}17} \leqslant T \leqslant \frac{0{,}4}{0{,}17}\right) = 2 \times \Pi\left(\frac{40}{17}\right) - 1$$
$$= 2 \times \Pi(2{,}35) - 1 = 2 \times 0{,}9906 - 1 \approx 0{,}98$$

2. Soit $D \leadsto \mathcal{N}(42;\sigma_2)$

Soit la variable aléatoire $T_1 \leadsto \mathcal{N}(0;1)$ telle que : $T_1 = \dfrac{D - 42}{\sigma_2} \Leftrightarrow D = \sigma_2 T_1 + 42$

$$P(41{,}6 \leqslant D \leqslant 42{,}4) = 0{,}95 \Leftrightarrow P(41{,}6 \leqslant \sigma_2 T_1 + 42 \leqslant 42{,}4) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(-\frac{0{,}4}{\sigma_2} \leqslant T_1 \leqslant \frac{0{,}4}{\sigma_2}\right) = 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow 2 \times \Pi\left(\frac{0{,}4}{\sigma_2}\right) - 1 = 0{,}95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{0{,}4}{\sigma_2}\right) = 0{,}975$$

avec $t = 1{,}96 = \dfrac{0{,}4}{\sigma_2} \Leftrightarrow \sigma_2 = \dfrac{0{,}4}{1{,}96} \approx 0{,}20$

Partie II

1. On s'intéresse à la conformité ou non (de probabilité 0,03) de la densité d'une plaque de mousse.
Donc $Y_1 \leadsto \mathcal{B}(0{,}03)$.
On renouvelle 5 fois cette expérience de Bernoulli de manière indépendante puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, d'où $Y_1 \leadsto \mathcal{B}(5;0{,}03)$.

2. $P(Y_1 \leqslant 1) = P(Y_1 = 0) + P(Y_1 = 0) = C_5^0 \times 0{,}03^0 \times 0{,}97^5 + C_5^1 \times 0{,}03^1 \times 0{,}97^4$
$= 1 \times 1 \times 0{,}97^5 + 5 \times 0{,}03 \times 0{,}97^4 = 0{,}97^5 + 0{,}15 \times 0{,}97^4 = 0{,}97^4(0{,}97 + 0{,}15)$
$= 1{,}12 \times 0{,}97^4 \approx 0{,}991$

Partie III

1. Soit $Z \leadsto \mathcal{N}(m;\sigma)$ tel que $m = n \times p = 1000 \times 0{,}03 = 30$ et $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{30 \times 0{,}97} \approx 5{,}39$.

2. Soit $S \leadsto \mathcal{N}(0;1)$ telle que : $S = \dfrac{Z - 30}{5{,}39} \Leftrightarrow Z = 5{,}39S + 30$ donc

$$P(Z < 25{,}5) = P(5{,}39S + 30 < 25{,}5) = P\left(S < -\frac{4{,}5}{5{,}39}\right) = \Pi\left(-\frac{4{,}5}{5{,}39}\right) = 1 - \Pi\left(\frac{4{,}5}{5{,}39}\right)$$
$$= 1 - \Pi(0{,}83) = 1 - 0{,}7967 \approx 0{,}20$$

Partie IV

1. $$m = \frac{41{,}65 \times 8 + 41{,}75 \times 5 + 41{,}85 \times 23 + 41{,}95 \times 30 + 42{,}05 \times 12 + 42{,}15 \times 16 + 42{,}25 \times 6}{100}$$
$$= \frac{4195{,}5}{100} = 41{,}955 \approx 41{,}96$$

2. Comme cela est un test unilatéral, on a $H_1 : d < 42$.

3. On sait que $m = m_e = 42$ et $\sigma = \dfrac{\sigma_e}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}17}{\sqrt{100}} = \dfrac{0{,}17}{10} = 0{,}017$

donc $\mathcal{N}(42;0{,}017)$.

4. Soit la variable aléatoire $V \leadsto \mathcal{N}(0;1)$ telle que : $V = \dfrac{\bar{X} - 42}{0{,}017} \Leftrightarrow \bar{X} = 0{,}017V + 42$

$$P(42 - h < \bar{X}) = 0{,}95 \Leftrightarrow P(42 - h < 0{,}017V + 42) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{0{,}017} < V\right) = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow P\left(V > -\frac{h}{0{,}017}\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - P\left(V \leqslant -\frac{h}{0{,}017}\right) = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow 1 - \Pi\left(-\frac{h}{0{,}017}\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - \left(1 - \Pi\left(\frac{h}{0{,}017}\right)\right) = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0{,}017}\right) = 0{,}95$$

avec $t = 1{,}645 = \dfrac{h}{0{,}017} \Leftrightarrow h = 0{,}017 \times 1{,}645 \approx 0{,}028$

5. On calcule d'abord l'intervalle de confiance $IC = [42 - 0{,}028; 42 + 0{,}028] = [41{,}972; 42{,}028]$

La règle de décision est :

- Si $d \in IC$, on valide H_0 : la densité des plaques de mousse est correcte, la commande est acceptée.
- Si $d < IC$, on rejette H_0 et on valide H_1 : la densité des plaques de mousses est inférieure à $42\ kg.m^{-3}$, le client peut refuser la commande.

6. D'après le résultat de la question 1, on obtient $d = 41{,}96$ ce qui nous donne $d < IC$: on rejette H_0. La livraison n'est donc pas conforme pour la densité au risque de 5%.