Brevet de technicien supérieur 9 novembre 2015 groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **10 points**

Lors de l'étude des signaux, on rencontre des signaux de type créneau qui sont modélisés par des fonctions en escalier.

Soit la fonction f paire et périodique de période 2π définie de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lclll} f(t) & = & 2\pi & \text{lorsque} & 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{4} \\ f(t) & = & 3\pi & \text{lorsque} & \dfrac{\pi}{4} \leqslant t < \dfrac{3\pi}{4} \\ f(t) & = & 0 & \text{lorsque} & \dfrac{3\pi}{4} \leqslant t < \pi \end{array}\right.$$

Partie A. Étude de la fonction

1. Tracer une représentation de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$ dans le repère figurant dans **le document réponse 1**.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire la valeur moyenne $\mu(f)$ de f sur une période.
   On rappelle que : $\mu(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B. Série de Fourier associée à la fonction f

On rappelle que la série de Fourier associée à une fonction T-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est

$$s(t) = a_0 + \sum_{n \geqslant 1} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right), \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}.$$

a_0 est la valeur moyenne de la fonction sur une période.
La fonction f étant paire, les coefficients b_n sont nuls et pour les entiers non nuls n les coefficients a_n vérifient : $a_n = \dfrac{4}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour les entiers n non nuls : $a_n = \dfrac{2}{n}\left[3\sin\left(\dfrac{3n\pi}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right]$.
2. Exprimer simplement a_1 et a_2 puis compléter le **tableau du document réponse 1**.
3. On appelle somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de la fonction f, la fonction s_n telle que : $s_n(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$.
   a. Écrire la somme partielle d'ordre 7 de la série de Fourier de la fonction f.
   b. Les sommes partielles d'ordres 2 et 11 de la série de Fourier de f ont été représentées sur le graphique donné dans le document réponse 1, l'une en pointillés, l'autre en trait plein.
   Qu'observe-t-on si on compare ces représentations à celle de la fonction f obtenue à la question **A. 1.** ?
   Indiquer à quelle somme partielle correspond chaque courbe du graphique donné.

Partie C. Puissance moyenne du signal sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$

1. Montrer que : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(f(t))^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{11}{2}\pi^2$.

2. On pose : $p(n) = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$.

a. Calculer $p(9)$. Arrondir la réponse au millième.

b. Montrer que si on prend $p(9)$ comme valeur approchée de $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(f(t))^2\mathrm{d}t$ on commet une erreur inférieure à 3 %.

Exercice 2 **10 points**

On étudie un système chargé de réguler la variation de pression à l'intérieur d'un caisson.
On choisit une échelle dans laquelle la valeur initiale de la pression est prise en origine et la valeur à atteindre vaut 1.
On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U(t) & = & 0 \text{ lorsque } t < 0 \\ U(t) & = & 1 \text{ lorsque } t \geqslant 0. \end{array}\right.$$

On donne un extrait de formulaire pour la transformation de Laplace :

Fonction causale	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto U(t-\alpha)$, avec α constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha p}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)U(t)$, avec ω constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t)U(t)$, avec ω constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

$t \longmapsto f(t)U(t)$	$p \longmapsto F(p)$
$t \longmapsto f(t-\alpha)U(t-\alpha)$, avec α constante réelle	$p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-\alpha p}$
$t \longmapsto f'(t)U(t)$	$p \longmapsto pF(p) - f\left(0^+\right)$
$t \longmapsto f''(t)U(t)$	$p \longmapsto p^2F(p) - pf\left(0^+\right) - f'\left(0^+\right)$

Partie A : Première commande

À l'instant $t = 0$, on commande le passage de la pression initiale (0 dans l'échelle choisie) à la pression souhaitée (1 dans l'échelle choisie).
La pression à l'instant t à l'intérieur du caisson (dans l' échelle choisie) est modélisée par une fonction s qui vérifie :

$$\frac{1}{101}s''(t) + \frac{2}{101}s'(t) + s(t) = U(t) \qquad (1)$$

La pression initiale valant 0 dans l'échelle choisie, on a : $s(0) = 0$.
On admet de plus que : $s'(0) = 0$.
On note S la transformée de Laplace de la fonction s.

1. a. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (1) ci-dessus, montrer que : $S(p) = \dfrac{101}{p\left(p^2+2p+101\right)}$.

b. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu :

1	ElémentsSimples$\left[101/\left(p\left(p^2+2p+101\right)\right)\right]$ $\rightarrow \dfrac{1}{p} + \dfrac{-p-2}{p^2+2p+101}$
2	FormeCanonique$\left[p^2+2p+101\right]$ $\rightarrow (p+1)^2+100$

En déduire que : $S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p+1}{(p+1)^2+10^2} - \dfrac{1}{(p+1)^2+10^2}$.

c. Montrer que pour tout réel positif ou nul t :

$s(t) = 1 - \left[\cos(10t) + \dfrac{1}{10}\sin(10t)\right]\mathrm{e}^{-t}$.

2. Montrer que pour tout réel positif ou nul t : $s'(t) = \dfrac{101}{10}\sin(10t)\mathrm{e}^{-t}$.

3. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = \sin(10t)$.

a. Montrer que f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{10}$.

b. Recopier et compléter le tableau suivant :

t	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{10}$
Signe de $f(t) = \sin(10t)$			
Sens de variation de s			

4. Les maximums relatifs successifs de la courbe représentant la fonction s ont pour coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5}\ ;\ 1 + \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}\right)}\right)$, avec k entier naturel.

On pose pour tout entier naturel k : $m_k = 1 + \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}\right)}$.

a. Compléter le tableau de valeurs donné dans le document réponse 2.

b. On considère que l'équilibre du système est atteint dès qu'un maximum de la courbe représentant la fonction s a une ordonnée m_k inférieure ou égale à $1,02$.

Sachant que l'unité de temps est la seconde, combien de temps faut-il pour que l'équilibre soit atteint ? Arrondir au centième.

Partie B : Modification de la commande

On souhaite réduire l'amplitude des variations de la pression à l'intérieur du caisson pendant le passage de la valeur initiale à la valeur souhaitée et atteindre plus rapidement l'équilibre du système. Pour cela, on commande l' augmentation de pression à l'intérieur du caisson en deux temps.

À l'instant $t = 0$, on demande le passage de 0 à $0,5$ (dans l'échelle choisie) puis, à l'instant $t = \dfrac{\pi}{10}$, on demande le passage de $0,5$ à 1.

La pression à l'instant t à l'intérieur du caisson (dans l'échelle choisie) est alors modélisée par une fonction r qui, sauf en $\dfrac{\pi}{10}$, vérifie :

$$\frac{1}{101}r''(t) + \frac{2}{101}r'(t) + r(t) = \frac{1}{2}U(t) + \frac{1}{2}U\left(t - \frac{\pi}{10}\right). \qquad (2)$$

De plus $r(0) = 0$ et on admet que $r'(0) = 0$.

1. On note R la transformée de Laplace de la fonction r. Montrer que :

$$R(p) = \frac{1}{2}\frac{101}{p\left(p^2+2p+101\right)}\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{10}p}\right).$$

2. En déduire que : $r(t) = \dfrac{1}{2}s(t)U(t) + \dfrac{1}{2}s\left(t - \dfrac{\pi}{10}\right)U\left(t - \dfrac{\pi}{10}\right)$.

3. On admet que la courbe de la fonction r présente des maximums relatifs successifs d'abscisses $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{5}$ et d'ordonnées $n_k = 1 + \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\Pi}{10}}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{10} - \frac{k\pi}{5}}$, avec k entier naturel non nul.

On donne dans le **document réponse 2** les premières valeurs de n_k.

a. La fonction s étudiée dans la **Partie A** et la fonction r sont représentées sur le graphique du document réponse 2.

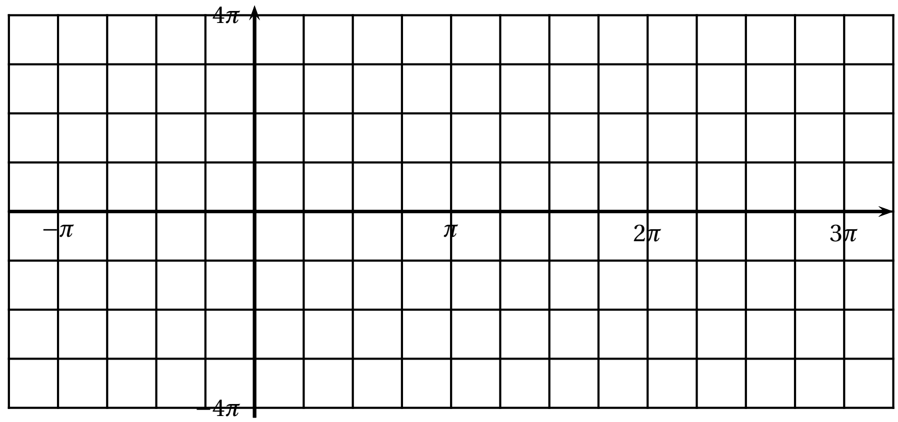
Indiquer sur le graphique la fonction représentée par chaque courbe.

b. La commande en deux temps étudiée dans la **Partie B** répond-elle aux objectifs que l'on s'était fixés ? Justifier.

Document réponse 1 à rendre avec la copie

Exercice 1

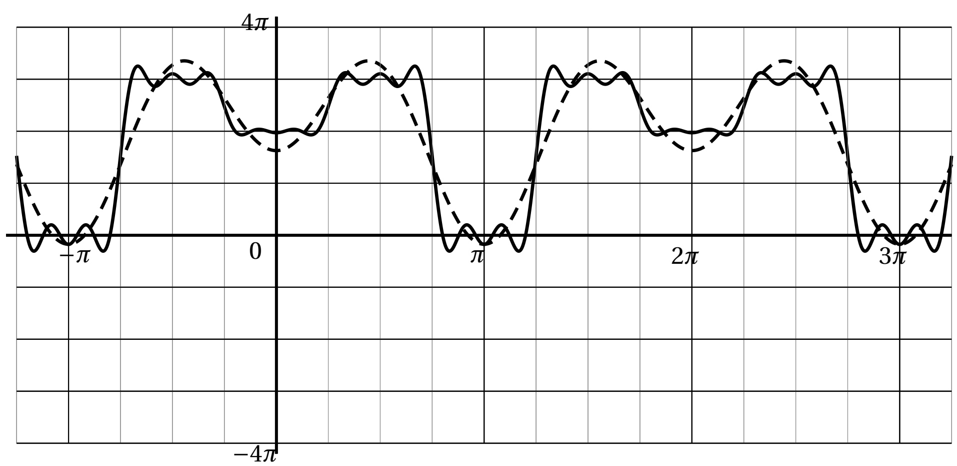
Partie A question 1



Partie B question 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valeur exacte de a_n	2π			$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{7}$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{9}$

Partie B question 3



Document réponse 2 à rendre avec la copie

Exercice 2

Partie A question 4. a.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
valeur arrondie au millième de m_k			1,208					

Partie B question 3.

k	1	2	3	4	5	6	7
valeur arrondie au millième de n_k	1,053	1,028	1,015	1,008	1,004	1,002	1,001