Brevet de technicien supérieur 13 mai 2014
Conception de produits industriels

Le sujet comporte 3 exercices indépendants qui seront traités sur des copies séparées

Exercice 1 **3 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse, ne rapporte ni n'enlève de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification.

1. Soit M une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, et N une matrice à 3 lignes et 2 colonnes.
   Le produit $M \times N$ est une matrice à :
   Réponse A : 2 lignes et 2 colonnes
   Réponse B : 3 lignes et 3 colonnes
   Réponse C : 2 lignes et 3 colonnes
   Réponse D : 3 lignes et 2 colonnes
2. Dans un repère orthonormal de l'espace les points A(1 ; 0 ; 2), B(−1 ; 1 ; 1), C(2 ; 1 ; 0) sont donnés.
   On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si :
   Réponse A : $a = 2$ et $b = 0$
   Réponse B : $a - 1$ et $b = 1$
   Réponse C : $a = 5$ et $b = 3$
3. Dans un repère orthonormal direct du plan, les points A(0 ; 1 ; 1), B(0 ; 13 ; 1) et $\mathrm{C}\left(3\sqrt{3}\ ;\ 4\ ;\ 1\right)$ sont donnés. On rappelle que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan, le produit scalaire des deux vecteurs est donné par
   $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cos\left(\overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$. Une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est :
   Réponse A : $\dfrac{\pi}{6}$ radians
   Réponse B : $\dfrac{\pi}{4}$ radians
   Réponse C : $\dfrac{\pi}{3}$ radians

EXERCICE 2 **7 points**

L'objet de cet exercice est l'étude de la diminution de température d'une pièce métallique, laissée à l'air libre après l'avoir chauffée.
Cette température est modélisée par une fonction f du temps t définie pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. L'unité de $f(t)$ est le degré Celsius (° C) et celle de t est l'heure.

Les deux parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E):\quad y' + 3y = 51,$$

dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0):\quad y' + 3y = 0.$$

2. Déterminer la fonction constante, solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Sachant qu'à l'instant initial $t = 0$, la température de la pièce métallique est égale à 220° C, déterminer l'expression de $f(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

B Étude globale de la fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = 203\mathrm{e}^{-3t} + 17.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.

   b. Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Une demi-heure après avoir laissé la pièce à l'air libre, sa température sera-t-elle inférieure à 40 °C ? Justifier.
4. On admet que la pièce métallique peut être tenue en main si sa température est inférieure ou égale à 38 °C. Au bout de combien de minutes après avoir arrêté de la chauffer est-on sûr que la pièce métallique pourra être tenue en main ? On donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à la minute près.

EXERCICE 3 **10 points**

Penser à rendre la feuille Annexe dûment complétée

On se propose de concevoir une nouvelle police de caractère pour la lettre « v » minuscule, tracée dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. La courbe formant cette lettre est la réunion de deux courbes de Bézier : C_1 et C_2.

Dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on se donne les points O, A, B, C et F de coordonnées :

$$\mathrm{O}(0~;~0), \mathrm{A}(-5~;~3), \mathrm{B}(-2~;~4), \mathrm{C}(-4~;~-5) \text{ et } \mathrm{F}\left(2~;~\frac{5}{2}\right).$$

Le point E est le symétrique du point C par rapport au point O.
La courbe de Bézier C_1 est obtenue à partir des quatre points, de définition A, B, C et O dans cet ordre.

La courbe de Bézier C_2 est obtenue à partir des quatre points de définition O, E, A et F dans cet ordre.

A. Tracé de l'arc de courbe C_1.

1. Sur l'annexe, placer les points A, B, C et O puis les tangentes à la courbe C_1 aux points A et O.
2. Pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on note $M_1(t)$ le point de paramètre t de la courbe C_1. Sur l'**annexe** les points $M_1\left(\dfrac{1}{4}\right)$ et $M_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$ sont déjà placés.
   Pour chaque valeur de $t \in [0\,;\,1]$, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau) permet de construire le point $M_1(t)$. Utiliser cet algorithme pour construire $M_1\left(\dfrac{3}{4}\right)$. **On laissera apparents les traits de construction**.
3. À l'aide des éléments construits, tracer l'allure de la courbe C_1 sur l'**annexe à rendre avec la copie**.

B. Étude et tracé de l'arc de courbe C_2.

Pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on note $M_2(t)$ le point de paramètre t définissant la courbe de Bézier C_2.
On rappelle que les polynômes de Bernstein $B_{i,3}$ de degré 3, pour i prenant les valeurs 0, 1, 2 ou 3, sont définis pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$B_{i,3}(t) = \frac{3!}{i!(3-i)!}\,t^i(1-t)^{3-i}.$$

Comme l'origine du repère est un des points de définition les points $M_2(t)$ sont donc définis, par la relation vectorielle simplifiée :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_2(t)} = B_{1,3}(t)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + B_{2,3}(t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + B_{3,3}(t)\overrightarrow{\mathrm{OF}}\text{, pour } t \in [0\,;\,1].$$

1. Déterminer les coordonnées du point E. Placer les points E et F sur l'annexe à rendre avec la copie.
2. Développer, réduire et ordonner le polynôme $B_{2,3}(t)$.
3. On admet que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{array}{lcl} B_{0,3}(t) & = & -t^3+3t^2-3t+1 \\ B_{1,3}(t) & = & 3t^3-6t^2+3t \\ B_{3,3}(t) & = & t^3. \end{array}$$

   Montrer que l'abscisse x du point $M_2(t)$ de la courbe C_2 admet pour expression :

$$x = f(t) = 29t^3 - 39t^2 + 12t\text{, pour } t \in [0\,;\,1].$$

4. **a.** Calculer $f'(t)$ où, f' est la dérivée de la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(t) = 29t^3-39t^2+12t$. On admet que la fonction f est dérivable.
   b. Résoudre l'équation $f'(t) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près des deux solutions que l'on nommera t_1 et t_2 avec $t_1 < t_2$.

c. On admet que l'ordonnée y du point $M_2(t)$ de la courbe C_2 a pour expression :

$$y = g(t) = 8,5t^3 - 21t^2 + 15t \text{ pour } t \in [0\ ;\ 1].$$

On admet également que la fonction g ainsi définie est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha[$, décroissante sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ 1]$, où $\alpha \approx 0,52$, que $f(\alpha) \approx -0,23$, et que $g(\alpha) \approx 3,32$ à 10^{-2} près.

Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

5. À l'aide du tableau des variations conjointes précédent, préciser le ou les points de la courbe C_2 où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Préciser également le ou les points de la courbe C_2 où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées.

6. Compléter le tableau de valeurs des fonctions f et g sur l'annexe à rendre avec la copie. Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

7. Tracer les tangentes à la courbe C_2, aux points $M_2(0)$, $M_2(t_1)$, $M_2(\alpha)$, $M_2(t_2)$ et $M_2(1)$, puis tracer la courbe C_2 ,sur l'**annexe à rendre avec la copie**.

C. Étude de la réunion des deux courbes

1. Les deux courbes C_1 et C_2 se raccordent en O. Montrer qu'elles ont même tangente en ce point

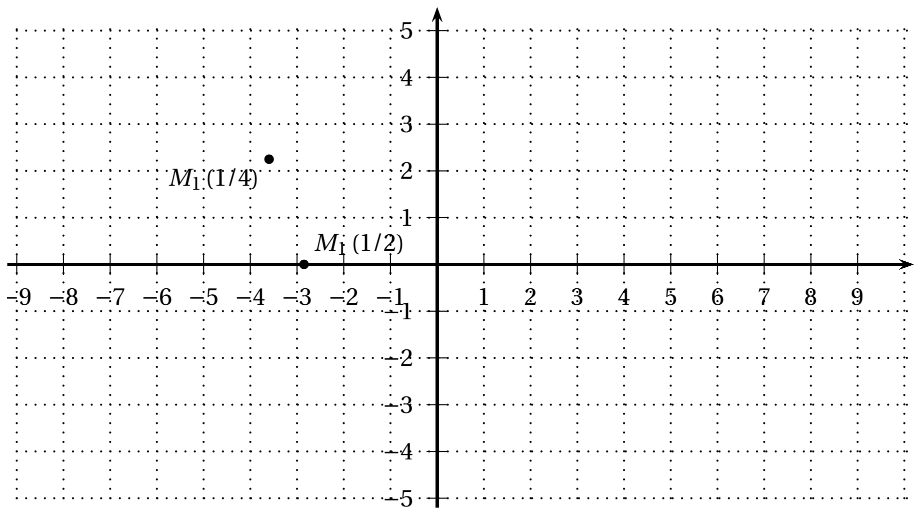
2. Si on change les coordonnées de l'un des points de définition autre que le point O d'une des deux courbes, les courbes C_1 et C_2 ont-elles toujours même tangente au point O ? Justifier votre réponse.

3. La boucle de la lettre « v » minuscule ne satisfait pas au concepteur. Pour remédier à cela, il décide de déplacer le point F en $F'(2\,;\,2)$ sans bouger les autres points de définition.

Indiquer l'impact que ce déplacement a sur la taille de la boucle du « v » minuscule.

On ne fera aucun calcul pour répondre à cette question.

ANNEXE II rendre avec la copie



t	0	0,10	0,20	0,30	0,52	0,70	0,80	0,90	1
$f(t)$	0				$-0,23$				
$g(t)$	0				$3,32$				