Brevet de technicien supérieur session 2013
Conception de produits industriels

Le sujet comporte 3 exercices indépendants qui seront traités sur des copies séparées

Exercice 1 **3 points**

Les quatre questions suivantes sont indépendantes. Pour les questions 2 et 4, toute trace de recherche, même non aboutie, sera valorisée.

1. Dans un repère de l'espace $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A$(-2~;~4~;~1)$, B$(3~;~5~;~-1)$ et C$(0~;~3~;~4)$.
   Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre G des points A, B et C.
2. Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A$(1~;~3~;~2)$, B$(0~;5~;-2)$ et C$(a~;~2~;~2)$ où a est un nombre réel.
   Déterminer la valeur de a pour que le triangle ABC soit rectangle en A.
   On pourra utiliser le produit scalaire.
3. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & a\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 3\end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.
   Déterminer a pour que le produit AB soit égal à $AB = \begin{pmatrix}-1 & 13\\-9 & 7\end{pmatrix}$.
4. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}4 & -2 & -1 & 1\\-1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,
   $C = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & c\end{pmatrix}$ où a, b et c sont des nombres réels.
   Déterminer les valeurs de a, b et c pour que l'on ait l'égalité matricielle suivante : $A \times B = C$.

Exercice 2 **7 points**

Les deux parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.
Partie A : résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + 4y' + 5y = 10x + 3$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
   $$(E_0) : \quad y'' + 4y' + 5y = 0.$$
2. Déterminer les constantes réelles a et b telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 4$.

Partie B : étude locale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}\sin(x) + 2x - 1.$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}$.

   b. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \longmapsto \sin x$.

   c. En déduire le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)$.

   d. Finalement, montrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = -1 + 4x - 4x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

2. **a.** Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

   b. Étudier les positions relatives de C et de T au voisinage du point d'abscisse 0 et illustrer cette situation par un schéma.

Exercice 3 **10 points**

Soit m un réel strictement positif dont on ne connait pas la valeur.
On considère les points $P_0(0\ ;\ 0)$, $P_1(1\ ;\ m)$ et $P_2(3\ ;\ 0)$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. On remarque que P_0 est égal à O, origine du repère.
On considère la courbe de Bézier définie par les points de définition P_0, P_1, P_2. Soit t un réel variant entre 0 et 1.
On pose $B_{0,\,2}(t) = (1-t)^2$, $B_{1,\,2}(t) = 2t(1-t)$ et $B_{2,\,2}(t) = t^2$.
On rappelle que la courbe de Bézier définie par trois points de définition P_0, P_1, P_2 est décrite par le point $M(t)$ qui satisfait à l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{2} B_{i,\,2}(t)\overrightarrow{OP_i}.$$

Comme m est variable on a une famille de courbes de Bézier de paramètre m.
On note Γ_m la courbe de Bézier associée au paramètre m.

Partie A : travail graphique

1. On prend $m = 8$. Placer les points P_0, P_1 et P_2 sur le graphique de l'annexe à rendre avec la copie.
2. Quels sont les éléments géométriques que vous pouvez déjà donner pour la construction de la courbe de Bézier définie par ces trois points de contrôle ?
3. Construire graphiquement (par la méthode des barycentres ou par toute autre méthode) le point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ de cette courbe.
4. À l'aide des questions 2. et 3. tracer l'allure de Γ_8, la courbe de Bézier correspondant à $m = 8$.
5. On prend maintenant $m = 1,5$. Placer, sur le même graphique, les nouveaux points P_1 et $M\left(\frac{1}{2}\right)$ correspondant à cette valeur de m.

6. Tracer l'allure de $\Gamma_{1,5}$.

Partie B : travail numérique

Soit le point $A(1\ ;\ 2)$. On se demande s'il existe une courbe de la famille de courbes Γ_m qui passe par le point A.

1. Placer le point A sur le graphique. Au vu des deux courbes tracées dans la partie A, que peut-on supposer sur la valeur de m ?
2. Démontrer que les coordonnées de $M(t)$ parcourant Γ_n sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t^2+2t \\ y(t) & = & m \times 2t(1-t) \end{array}\right.$$

   On remarque que l'ordonnée de $M(t)$ dépend de t et de m.
3. Justifier que l'on est conduit à résoudre le système de deux équations à deux inconnues t et m suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll} t^2+2t-1 & = & 0 & \quad (1) \\ 2mt(1-t) & = & 2 & \quad (2) \end{array}\right.$$

4. On calcule d'abord les valeurs de t possibles. Pour cela, résoudre l'équation (1) pour t variant dans $[0\,;\,1]$.

   En déduire qu'il existe une unique solution t_0 dont on donnera la valeur exacte.
5. Remplacer t par t_0 dans l'équation (2). En déduire qu'il existe une seule valeur de m possible que l'on notera m_0. En déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près.
6. Y a-t-il une courbe de la famille Γ_m qui passe par le point A ? Si oui, laquelle ?

Partie C : vérification

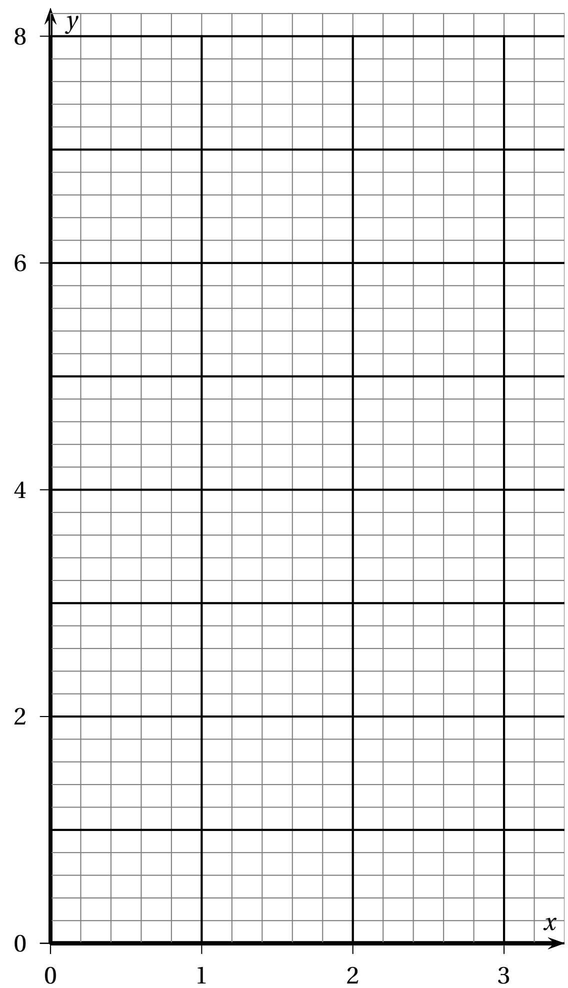
Pour la suite de l'exercice, on choisit pour m la valeur $m_0 = 4,12$. On considère la courbe de Bézier Γ_{m_0}.

1. Un tableau de valeurs $(t,\ x(t),\ y(t))$, établi pour la valeur $m = m_0$, est proposé en annexe à rendre avec la copie.

   Compléter ce tableau à l'aide de la calculatrice. Donner les résultats arrondis à 10^{-2}.

   On ne demande pas d'étudier les variations conjointes de $x(t)$ et $y(t)$.
2. Tracer Γ_{m_0} avec soin sur le graphique de l'annexe à rendre avec la copie.

Exercice 3 : partie A



t	0	0,1	0,2	0,3	0,414	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$x(t)$	0		0,44			1,25					
$y(t)$	0		1,32			2,06					