Brevet de technicien supérieur 13 mai 2015
Conception de produits industriels

Exercice 1 **4 points**

Une entreprise fabrique trois types de pièces différentes : P_1, P_2 et P_3.
Un programme de production pour une journée donnée s'exprime par un triplet $(x,\ y,\ z)$.
Plus précisément, le programme de production $(x,\ y,\ z)$ correspond à la production de x pièces de type P_1, y pièces de type P_2 et z pièces de type P_3 au cours d'une journée donnée.
Pour réaliser un programme de production $(x,\ y,\ z)$, on utilise a kilogrammes d'acier, b kilogrammes de bois et cela nécessite t heures de travail, ce que l'on résume par le triplet $(a,\ b,\ t)$.
Pour une pièce de type P_1, on a besoin de 0,5 kg d'acier, 1 kg de bois et 1 h de travail.
Pour une pièce de type P_2, on a besoin de 1 kg d'acier, 2 kg de bois et 1 h de travail.
Pour une pièce de type P_3, on a besoin de 1,5 kg d'acier, 2 kg de bois et 3 h de travail.

1. Justifier que $a = 0,5x + y + 1,5z$.
   Exprimer également b et t en fonction de x, y et z.

   Dans la suite de l'énoncé, on admet que ces expressions peuvent se traduire matriciellement par l'égalité $Y = AX$ dans laquelle $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 1,5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
   $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ t \end{pmatrix}$.

2. Durant une journée,l'entreprise a produit 37 pièces de type P_1, 52 de type P_2 et 65 de type P_3.
   a. Écrire la matrice X correspondant à cette journée.
   b. Déterminer la quantité d'acier, de bois et le nombre d'heures de travail pour la production de cette journée.

3. Un logiciel de calcul formel fournit sur la ligne marquée $(\% \circ 2)$ l'expression de la matrice A^{-1}, matrice inverse de A.

   (%i1) A : matrix ([0,5 ; 1 ; 1,5], [1 ; 2 ; 2], [1 ; 1 ; 3]) ;

   (%o1) $\begin{bmatrix} 0,5 & 1 & 1,5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (%i2) invert(A) ;

   (%o2) $\begin{bmatrix} -8,0 & 3,0 & 2,0 \\ 2,0 & 0,0 & -1,0 \\ 2,0 & -1,0 & 0,0 \end{bmatrix}$

   a. Utiliser ce résultat pour résoudre le système (S) d'inconnues x, y et z :

   $$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} 0,5x + y + 1,5z & = & 163 \\ x + 2y + 2z & = & 277 \\ x + y + 3z & = & 274 \end{array}\right.$$

   b. Lors d'une journée de production, 163 kg d'acier et 277 kg de bois ont été utilisés et 274 heures de travail ont été nécessaires.
   Quelles quantités de pièces de chaque type P_1, P_2 et P_3 ont été fabriquées dans cette journée ?

Exercice 2 **8 points**

Un formulaire est disponible en fin d'exercice

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' - 2y' + y = -2$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle $(H): \quad y'' - 2y' + y = 0$.
2. Déterminer une fonction constante qui est solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

Partie B - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (4 - 3x)\mathrm{e}^{x} - 2.$$

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$. Que peut-on en déduire d'un point de vue graphique ?
2. **a.** Montrer que la dérivée f' de f est définie par : $f'(x) = (1 - 3x)\mathrm{e}^{x}$.

   b. Déterminer suivant les valeurs de x le signe de f'.

   c. En déduire les variations de la fonction f. On regroupera les résultats dans un tableau de variations en faisant apparaître la valeur de l'extremum.
3. **a.** Montrer à l'aide du tableau de variations que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[1\,;2]$.

   b. Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de x_0.

Partie C - Calcul intégral

À l'aide d'un logiciel de calcul formel on a déterminé une primitive de la fonction f. Une capture d'écran est donnée ci dessous :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).
integrate$((4 - 3x) * \exp(x) - 2, x)$ $(-3x + 7)\mathrm{e}^{x} - 2x$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer une valeur approchée au dixième de l'aire, en unité d'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = x_0$ (on prendra 1,1 pour valeur approchée de x_0).
2. En déduire une valeur approchée au dixième de l'aire en cm^2, de ce même domaine.

Formulaire

Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$ Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	• Si $\Delta > 0$, $f(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. • Si $\Delta = 0$, $f(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{rx}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. • Si $\Delta < 0$, $f(x) = [A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]\mathrm{e}^{\alpha x}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
Dérivée d'un produit u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.	La fonction uv est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$

Exercice 3 **8 points**

En robotique. on doit souvent planifier des trajectoires pour permettre à un robot de se déplacer d'un point initial à un point final. La trajectoire peut alors être décomposée en une juxtaposition de courbes B-splines.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Nous allons nous intéresser à l'étude de la portion de trajectoire qui débute au point A de coordonnées (4 ; 7) et se termine au point B de coordonnées (6 ; 1).
On souhaite construire la courbe B-spline Γ obtenue à partir de quatre points de définition P_0, P_1, P_2 et P_3 et des trois polynômes de Riesenfeld du second degré. Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$;

$$P_0(0\,;\,8), P_1(8\,;\,6), P_2(1\,;\,0) \quad \text{et} \quad P_3(11\,;\,2).$$

1. On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 1] par :

$$R_i(t) = 3\sum_{j=0}^{2-i}(-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], $R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2}$.
   (On pourra utiliser ce résultat dans, la suite de l'exercice).
   Dans la suite de l'exercice, **on admet que**, pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 1] ;

$$R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_2(t) = \frac{1}{2}t^2.$$

2. La courbe B-spline Γ cherchée est la réunion de deux arcs de courbe Γ_1 et Γ_2.
   Γ_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_1(t)} = R_0(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_0} + R_1(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_1} + R_2(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_2}, \quad t \in [0\,;\,1]$$

Γ_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_2(t)} = R_0(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_1} + R_1(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_2} + R_2(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_3}, \quad t \in [0~;~1]$$

a. Montrer que le point $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_0P_1]$.

b. L'arc de courbe Γ_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & f_1(t)\\ y & = & g_1(t)\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0~;~1]$$

On admet que :

$$f_1(t) = -\frac{15}{2}t^2 + 8t + 4.$$

Montrer que

$$g_1(t) = -2t^2 - 2t + 7.$$

c. Étudier les variations de f_1 et g_1 sur $[0~;~1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique à réaliser sur votre copie.

d. Donner un vecteur directeur de la tangente à l'arc de courbe Γ_1 au point $M_1(0)$, puis au point $M_1\left(\frac{8}{15}\right)$ puis au point $M_1(1)$.

e. Construire sur le graphique de l'annexe, les tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$, $M_1\left(\frac{8}{15}\right)$ puis au point $M_1(1)$ puis construire l'arc de courbe Γ_1.

Placer les points de définition P_0, P_1, P_2 et P_3 ainsi que les points A et B.

f. L'arc de courbe Γ_2 est tracé sur le graphique de l'annexe, avec ses tangentes aux points $M_2\left(\frac{7}{17}\right)$et $M_2\left(\frac{3}{4}\right)$. Il est défini par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & f_2(t)\\ y & = & g_2(t)\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0~;~1]$$

Compléter, **à l'aide de la courbe**, le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2, situé sur l'annexe. Les valeurs seront données par lecture graphique, sans calcul.

3. **On admet** que l'arc de courbe Γ_2 est défini par La représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c l c l} x & = & f_2(t) & = & \frac{17}{2}t^2 - 7t + \frac{9}{2}\\ y & = & g_2(t) & = & 4t^2 - 6t + 3\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0~;~1]$$

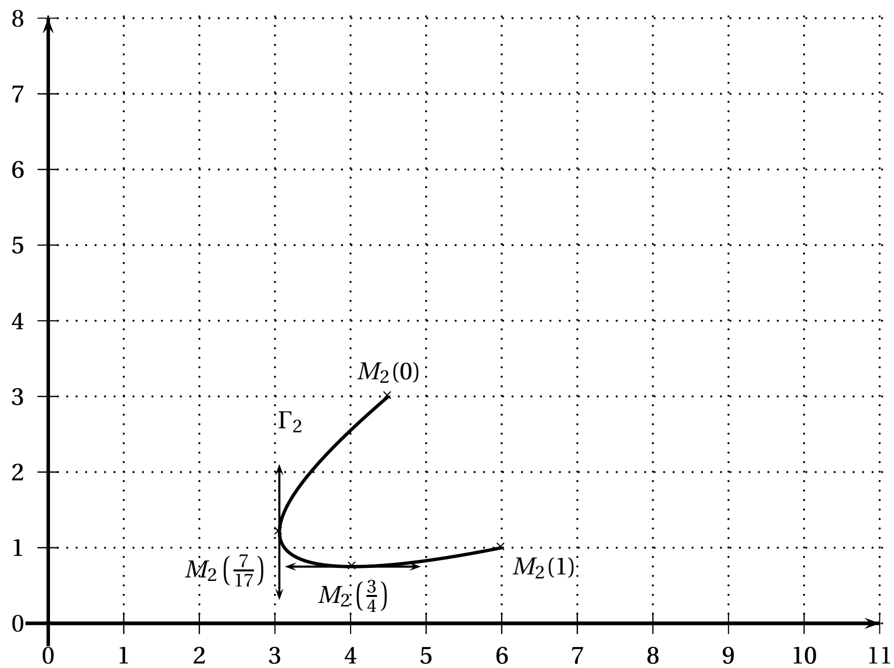
a. On admet que les arcs de courbe Γ_1 et Γ_2, se raccordent en un point I. Déterminer les coordonnées du point I.

b. Montrer que les arcs de courbe Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en I.

c. On souhaite modifier le début de la trajectoire et prendre comme point initial le point A' de coordonnées $(3~;~5)$. Les points de définition P_1, P_2 et P_3 sont inchangés.

En utilisant la question 2. a., donner la position du point P_0 pour que la nouvelle condition soit satisfaite.

Annexe (à rendre avec la copie)



L'arc de courbe Γ_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f_2(t) \\ y & = & g_2(t) \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1]$$

Tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 (à compléter) :

t	0	$\frac{7}{17}$	$\frac{3}{4}$	1
$f_2'(t)$		0		
$f_2(t)$				
$g_2'(t)$			0	
$g_2(t)$				