Brevet de technicien supérieur 12 mai 2016
Conception de produits industriels

Exercice 1 **3,5 points**

Une firme nationale fabrique des motos dans trois usines : l'usine 1, l'usine 2 et l'usine 3.
Les trois usines fabriquent trois modèles différents de motos : A, B et C.
Le nombre de motos produites par heure de travail dans les trois usines est donné dans le tableau suivant :

Unité / Modèle	Usine 1	Usine 2	Usine 3
A	1	2	3
B	8	5	5
C	5	3	3

On note x, y et z le nombre d'heures de travail respectivement dans l'usine l, dans l'usine 2 et dans l'usine 3.
On note a, b et c le nombre total de motos fabriquées respectivement de modèles A, B et C.
Dans la suite de l'énoncé, on admet que cette situation peut se traduire matriciellement par l'égalité $Y = MX$ dans laquelle :

$$Y = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 8 & 5 & 5\\ 5 & 3 & 3\end{pmatrix},\ \text{et } X = \begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}.$$

1. **a.** Durant une période donnée, 50 h de travail ont été effectuées dans l'usine 1, 30 h dans l'usine 2 et 26 h dans l'usine 3. Donner la matrice X correspondante.

   b. Quel est le nombre de motos de modèle A fabriquées pendant cette période ? De modèle B ? De modèle C ?

2. Au cours de l'année 2015, ont été fabriquées :

   21 450 motos de modèle A ; 62 350 motos de modèle B ; 38 050 motos de modèle C.

   a. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.*
   La réponse juste rapporte 0,5 *point. Une réponse fausse, une absence de réponse ou une réponse multiple ne rapporte ni n'enlève de point.*

   On admet que la matrice M est inversible, Donner parmi les trois matrices ci-dessous celle qui est l'inverse de la matrice M.

   réponse A : $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3\\ -8 & -5 & -5\\ -5 & -3 & -3\end{pmatrix}$ réponse B : $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5\\ -1 & 12 & -19\\ 1 & -7 & 11\end{pmatrix}$ réponse C : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

   b. En déduire le nombre d'heures qui ont été nécessaires dans chaque usine pour réaliser cette production. Justifier,

Exercice 2 **7,5 points**

Un formulaire est fourni enfin d'exercice.
Les parties A et B sont indépendantes, la partie C utilise l'étude de la partie B.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'(t) + 0,027y(t) = 0,675$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$y'(t) + 0,027y(t) = 0.$$

2. Déterminer une fonction g constante, solution de l'équation différentielle (E).
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale : $f(0) = 0$.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, par :

$$f(t) = 25 - 25\mathrm{e}^{-0,027t}.$$

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification, la réponse juste rapporte* 0,5 *point. Une réponse fausse, une absence de réponse ou une réponse multiple ne rapporte ni n'enlève de point.*

   La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = -0,027t$	$t = 25$	$y = 25$

2. **a.** On admet que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Déterminer l'expression de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Avec un logiciel de calcul formel, on obtient le développement limité, à l'ordre 2 au voisinage de zéro, de la fonction f :

$$f(t) = 0,675t - 0,0091125t^2 + t\epsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0.$$

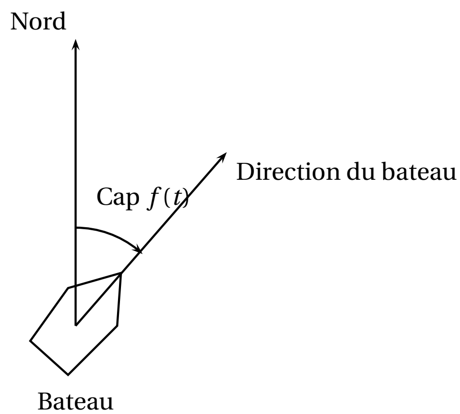
   a. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   b. Préciser les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T au voisinage de ce point.

   Justifier la réponse.

Partie C - Application à l'étude d'un cap

Le cap d'un bateau est l'angle entre la direction du bateau et la direction du nord géographique, exprimé en degré et mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.



Contrôler le cap d'un voilier nécessite une vigilance permanente. C'est pourquoi on utilise un pilote automatique de bateau qui permet de faire tendre le cap vers une valeur précise et préalablement fixée.
On admet que la fonction étudiée dans la partie B modélise ce cap. Plus précisément $f(t)$ représente le cap, exprimé en degré, d'un bateau en fonction du temps t, exprimé en seconde, après une action sur le pilote automatique.
Pour répondre aux questions de la partie C, on pourra utiliser l'élude de la fonction f réalisée dans la partie B.

1. Donner le cap qui a été précisé au pilote automatique
2. Déterminer le temps nécessaire, arrondi à la seconde, pour obtenir un cap supérieur à 24,9 °.
   Dans cette question. Toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie sera prise en compte dans la notation

FORMULAIRE

Les solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) , $ay'(t) + by(t) = 0$ sont les fonctions y définies sur un intervalle I par :

$$y(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \text{ avec } k \text{ constante réelle.}$$

Exercice 3 **9 points**

Un designer souhaite créer une nouvelle police de caractère stylisée.
Pour ce faire, il utilise des courbes de Bézier.
Il souhaite s'inspirer de la lettre majuscule L cursive ci-contre.

$\mathscr{L}$

Les études suivantes concernent la lettre L du designer vue comme la réunion de deux ares de courbes de Bézier. La partie supérieure est l'arc de courbe C_1 étudiée dans la partie A et la partie inférieure est l'arc de courbe C_2 étudiée dans la partie B.

Partie A - Étude de la partie supérieure de la lettre L

L'objectif de cette partie est d'étudier la courbe de Bézier C_1 associée aux quatre points de contrôle successifs :

$$P_0(0\,;\,4) \quad ; \quad P_1(10\,;\,0) \quad ; \quad P_2(3\,;\,8) \text{ et } P_3(1\,;\,0).$$

1. L'arc de courbe C_1 est tracé **sur l'annexe 1 à rendre avec la copie**.

a. Placer les points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3.

b. Pour chaque valeur de t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau) permet de construire le point $M_1(t)$ de paramètre t de la courbe de Bézier C_1.

Utiliser cet algorithme pour la valeur $t = 0,5$ et placer le point $M_1(0,5)$ associé.

Laisser les traits de construction apparents.

2. L'arc de courbe C_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0\,;\,1].$$

On ne demande pas de déterminer les expressions des fonctions f_1 et g_1.

En utilisant la courbe C_1 réalisée en annexe 1, compléter les deux dernière lignes du tableau des variations conjointes des deux fonctions f_1 et g_1, situé en annexe 2 à rendre avec la copie.

Les valeurs seront données avec la précision permise par le graphique, sans calcul. aucune justification n'est attendue.

3. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à la courbe C_1 au point P_3.

Partie B - Étude de la partie inférieure de la lettre L

On désigne par a un nombre réel.

On souhaite compléter la courbe C_1 par une courbe de Bézier C_2 en respectant les contraintes suivantes :

— les points de contrôle successifs à la courbe C_2 sont

$$P_3(1\,;\,0) \quad ; \quad P_4(0\,;\,a) \quad ; \quad P_5(-3\,;\,3,5) \text{ et } P_6(4\,;\,0).$$

— les courbes ont même tangente au point P_3.

1. Dans les conditions énoncées ci-dessus, montrer alors que $a = -4$.

Par la suite, on admettra que les points de contrôle successifs de la courbe C_2 sont

$$P_3(1\,;\,0) \quad ; \quad P_4(0\,;\,-4) \quad ; \quad P_5(-3\,;\,3,5) \text{ et } P_6(4\,;\,0).$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on rappelle que la courbe de Bézier C_2 associée aux 4 points de contrôle successifs P_3, P_4, P_5 et P_6 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = B_0(t)\overrightarrow{OP_3} + B_1(t)\overrightarrow{OP_4} + B_2(t)\overrightarrow{OP_5} + B_3(t)\overrightarrow{OP_6}$$

où $t \in [0\,;\,1]$ et les $B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein de degré 3 donnés par la formule :

$$B_i(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}.$$

On rappelle que les coefficients $\binom{3}{i}$ sont des coefficients binomiaux qui peuvent être obtenus par la formule $\binom{3}{i} = \dfrac{3!}{i!(3-i)!}$.

2. Montrer que $B_2(t) = -3t^3 + 3t^2$

3. On admet que

$$\begin{array}{lcl} B_0(t) & = & -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 \\ B_1(t) & = & 3t^3 - 6t^2 + 3t \\ B_3(t) & = & t^3. \end{array}$$

a. L'arc de courbe C_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0\,;\,1].$$

Montrer que

$$f_2(t) = 12t^3 - 6t^2 - 3t + 1.$$

On admet que :

$$g_2(t) = -22,5t^3 + 34,5t^2 - 12t.$$

b. Étudier les variations de la fonction f_2 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et compléter alors le tableau des variations conjointes situés sur l'annexe 3 à rendre avec la copie. On arrondira si nécessaire les valeurs au dixième.

Les résultats concernant la fonction g_2 notés dans le tableau précédent peuvent être utilisés.
Il n'est pas demandé de les retrouver.

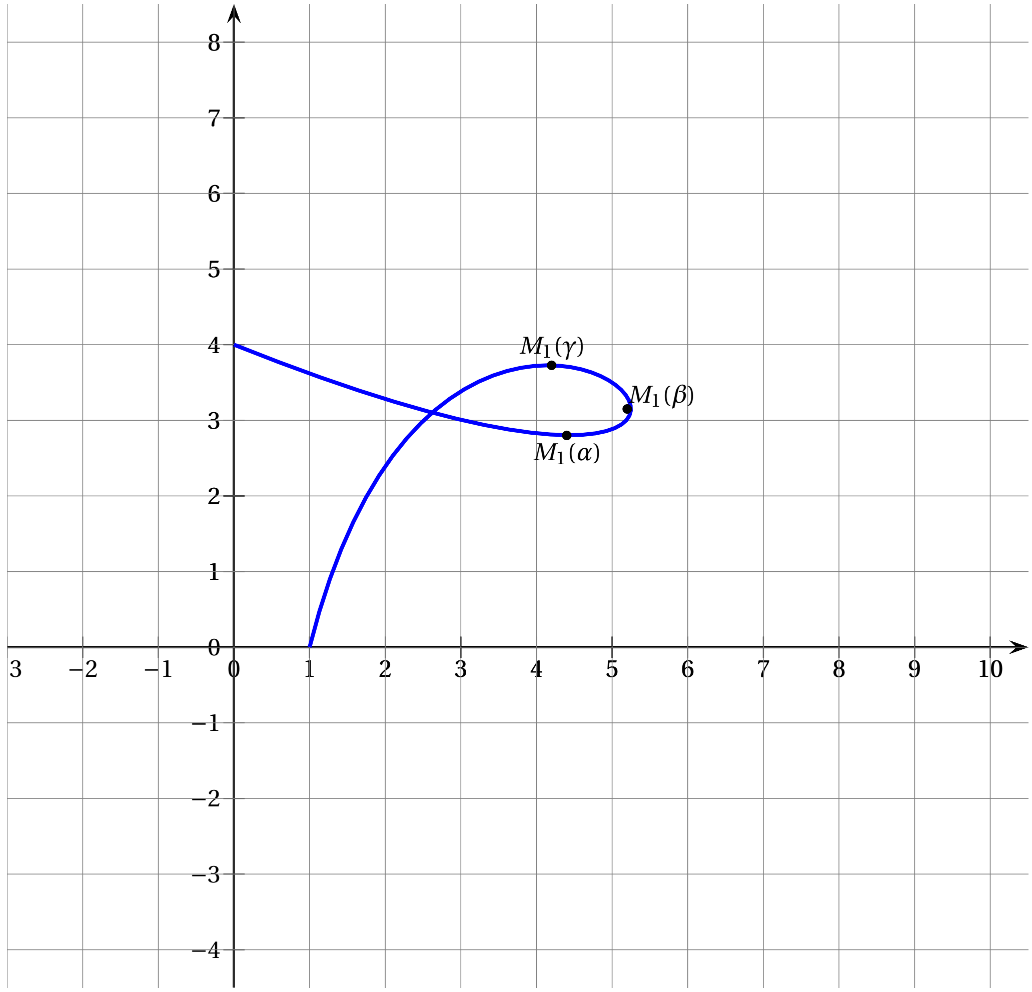
4. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à la courbe C_2 au point $M_2(1)$.

5. Tracer les tangentes à la courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{2}{9})$, $M_2(0,5)$, $M_2(0,8)$ et $M_2(1)$ puis la courbe C_2 sur la figure 1 où est déjà représenté l'arc C_1.

6. Le designer trouve que la boucle inférieure de la lettre est trop grande. Pour corriger ce défaut, il souhaite déplacer le point P_6, en le gardant sur la droite d'équation $x = 4$. Proposer une position possible pour le point P_6 qui permettrait de réduire la boucle inférieure de la lettre.

ANNEXES À RENDRE AVEC LA COPIE

Annexe 1



ANNEXES À RENDRE AVEC LA COPIE

Annexe 2

Tableau des variations conjointes (partie A question 2.)

t	0		α		β		γ		1
$f_1'(t)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f_1(t)$	0	↗	$4{,}4$	↗	$5{,}2$	↘	$4{,}2$	↘	1
$g_1(t)$									
$g_1'(t)$			0				0		

Annexe 2

Tableau des variations conjointes (partie A question 3. b.)

t	0		$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{5}$		1
$f_2'(t)$									
$f_2(t)$									
$g_2(t)$	0	↘	$-1{,}2$	↗	$-0{,}2$	↗	1	↘	0
$g_2'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	