∽ Brevet de technicien supérieur Métropole ∾ 12 mai 2016 - Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A – Probabilités conditionnelles

Pour contacter une compagnie d'assurance, deux possibilités sont offertes :

- se rendre en agence ;
- à distance par téléphone.

Le responsable du pôle « satisfaction client » décide de réaliser une enquête afin de savoir si les clients qui se rendent à l'agence ou qui contactent la compagnie par téléphone sont satisfaits de l'accueil.
À l'issue de l'enquête, réalisée auprès de 1 000 clients, les résultats sont les suivants :

- 380 se sont rendus en agence
- parmi les clients qui se sont rendus en agence, 93 % se sont déclarés satisfaits de l'accueil,
- parmi les clients qui ont téléphoné, 15 % ont déclaré qu'il n'étaient pas satisfaits de l'accueil.

On interroge au hasard un client.
On considère les évènements suivants :

A : « Le client s'est rendu en agence »

S : « Le client est satisfait de l'accueil »

On rappelle que l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$, que la probabilité de l'évènement A se note $P(A)$ et que la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $P_B(A)$.
Dans toute cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-4}, si nécessaire.

1. Donner la valeur des probabilités : $P(A)$, $P_A(S)$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{S}\right)$.
2. L'arbre de probabilités donné en annexe à rendre avec la copie représente la situation. Compléter celui-ci.
3. Calculer la probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil.
4. Montrer que la probabilité de S est 0,880 4.
5. Le responsable a pour objectif qu'il y ait moins de 10 % clients non satisfaits par l'accueil. Cet objectif est-il atteint ?
6. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence ?

Partie B – Loi normale

La compagnie d'assurances s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2016 sur les véhicules qu'elle assure. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût en euros.
L'étude des années précédentes permet de supposer que X suit la loi normale d'espérance 1 200 et d'écart type 200.

1. La compagnie estime que pour l'année 2016, elle devra faire face à 10 000 sinistres. À combien peut-elle estimer le coût de l'ensemble de ces sinistres ?
2. Sans utiliser la calculatrice, expliquer pourquoi on peut estimer qu'environ 95 % des sinistres auront un coût compris entre 800 et 1 600 euros.
3. Par la méthode de votre choix, calculer $P(X > 1\,000)$.
Donner le résultat arrondi à 10^{-2}.
4. À l'aide de la calculatrice, estimer pour l'année 2016 le pourcentage de sinistres dont le coût sera compris entre 1 000 et 1 500 euros.

Partie C – Loi binomiale

Un employé prend au hasard 10 dossiers de sinistres. Ce tirage est assimilé â un tirage avec remise car le nombre de dossiers est très grand.
On suppose que la probabilité que le coût du sinistre dépasse 1 000 euros est 0,84.
Soit Y la variable aléatoire qui pour un lot de 10 dossiers pris au hasard indique le nombre de dossiers du lot dont le coût est supérieur à 1 000 euros.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans le lot prélevé par l'employé, tous les dossiers aient un cout supérieur à 1 000 euros. Arrondir la probabilité à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité que l'employé obtienne dans le lot prélevé au moins six dossiers dont le coût est supérieur à 1 000 euros. Arrondir la probabilité à 10^{-3}.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes
Un formulaire est disponible en fin d'exercice

Partie A – Étude d'une fonction

La population d'une ville entre le 1er janvier 2015 et le 1er janvier 2030 est modélisée par la fonction définie sur $[0\,;\,15]$ par :

$$f(x) = \frac{40x}{x^2+25} + 15.$$

Dans ce modèle, $f(x)$ est le nombre d'habitants de la ville en milliers et x le nombre d'années écoulées depuis les 1er janvier 2015.
Par exemple, $f(2)$ est une estimation du nombre d'habitants de la ville (en milliers) le 1er janvier 2017.

1. Calculer le nombre d'habitants le 1er janvier 2015.
2. On admet que la fonction f est dérivable et on désigne par f' sa fonction dérivée
   a. Montrer, en détaillant les calculs que, pour tout nombre réel x de $[0\,;\,15]$,
   $$f'(x) = \frac{-40(x-5)(x+5)}{\left(x^2+25\right)^2}.$$
   b. Étudier le signe de $x-5$ sur l'intervalle $[0\,;\,15]$.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,15]$ puis le tableau de variation complet de f sur $[0\,;\,15]$.

3. En utilisant le modèle et les résultats obtenus précédemment, à quelle date la population de la ville sera-t-elle maximale et quel sera le nombre d'habitants ?

Partie B – Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie A.

1. La fonction F est définie sur $[0\,;\,15]$ par

$$F(x) = 20\ln\left(x^2+25\right)+15x.$$

Démontrer que, F est une primitive de f sur $[0\,;\,15]$.

2. Sans calculatrice, montrer que $I = 20\ln 2 + 75$, en précisant les étapes du calcul.
3. En déduire une estimation de la population moyenne de la ville entre le 1^er^ janvier 2015 et le 1^er^ janvier 2030. Arrondir cette estimation à la centaine d'habitants.

Partie C – Suites numériques

Dans cette ville, on compare l'évolution de la fréquentation de deux écoles A et B. En 2015, l'école A compte 310 élèves et l'école B en compte 280. On fait l'hypothèse que, chaque année, l'effectif de l'école A augmente de 10 élèves tandis que celui de l'école B augmente de 5 %.

1. Justifier que le nombre d'élèves de l'école B pour l'année $2015+n$ peut être modélisé par une suite géométrique (b_n) dont on précisera la raison et le premier terme b_0.
2. La capacité de l'école B est de 450 élèves.
   L'école B pourra-t-elle accueillir tous les élèves prévus par le modèle en 2025 ?
3. La feuille de calcul en annexe présente les prévisions d'effectifs des deux écoles pour les années à venir. Les résultats y sont arrondis à l'unité. Quelle formule peut-on écrire en C3 pour obtenir par recopie vers le bas les effectifs de l'école A ?
   Compléter sur **l'annexe à rendre avec la copie** la colonne C avec les valeurs manquantes.
4. On considère l'algorithme ci-dessous.

1.	**Variables** :	N entier, A et B réels
2.	**Initialisation** :	$N=0$, $A=310$ et $B=280$
3.	**Traitement** :	TANT QUE $A \geqslant B$
4.		affecter à N la valeur $N+1$
5.		affecter à B la valeur $1,05\times B$
6.		affecter à A la valeur $A+10$
7.		Fin TANT QUE
8.	**Sortie** :	Afficher N

Quelle est la valeur de N affichée à la sortie de cet algorithme ?
Que représente cette valeur de N dans le contexte de l'énoncé ?

Formulaire

Si u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, v ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Si u est une fonction strictement positive, définie et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $(\ln u)$ est définie et dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

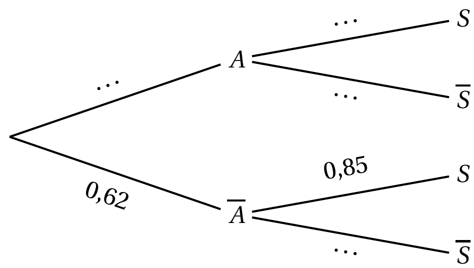
a et b étant deux nombres strictement positifs on a : $\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$.

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a~;~b]$ (avec $a < b$) alors sa valeur moyenne sur $[a~;~b]$ est :

$$\frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 1 - Partie A



Exercice 2 - Partie C

	A	B	C	D
1	Année	n	école A	école B
2	2015	0	310	280
3	2016	1		294
4	2017	2		309
5	2018	3		324
6	2019	4		340
7	2020	5		357
8	2021	6		375