Brevet de technicien supérieur session 2008
Comptabilité et gestion des organisations
Éléments de correction

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction

1. **a.** Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(125\,504\mathrm{e}^{-1,9x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \left(125\,504\mathrm{e}^{-1,9x}\right) = 1$ et finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

   b. Le résultat précédent montre que la droite Δ d'équation $y = 3$ est asymptote à C au vosinage de plus l'infini.

2. **a.** On a $\left(125\,504\mathrm{e}^{-1,9x}\right)' = -1,9 \times 125\,504\mathrm{e}^{-1,9x} = -238\,457,6\mathrm{e}^{-1,9x}$.

   Donc $f'(x) = -\dfrac{3 \times \left(-238\,457,6\mathrm{e}^{-1,9x}\right)}{\left(1 + 125\,504\mathrm{e}^{-1,9x}\right)^2} = \dfrac{715\,372,8\mathrm{e}^{-1,9x}}{\left(1 + 125\,504\mathrm{e}^{-1,9x}\right)^2}$.

   b. Tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro : la dérivée est supérieure à zéro sur $[0\ ;\ +\infty[$; donc la fonction f est croissante sur cet intervalle de $f(0) = \dfrac{3}{125\,505}$ à 3.

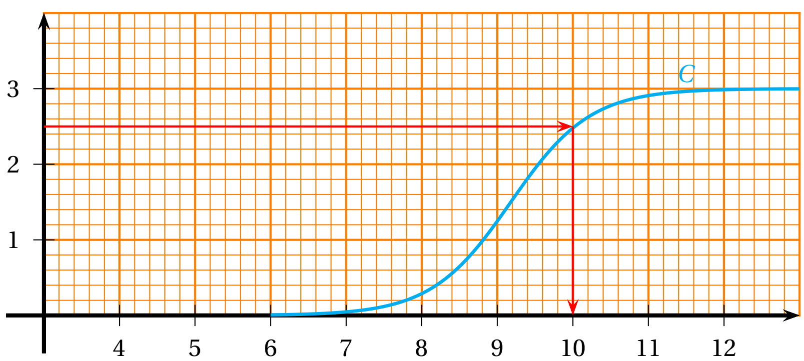
   c. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{3}{125\,505}$ $\nearrow$	3

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0,01	0,05	0,29	1,25	2,48	2,91	2,99

   b. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini au début. Sur l'axe des abscisses, commencer la graduation à 3.



4. Graphiquement on trouve que $f(10) \approx 2,5$.

B. Calcul intégral

1. En reprenant l'énoncé et en multipliant chaque terme du quotient par $e^{1,9x}$, on obtient :
$f(x) = \dfrac{3e^{1,9x}}{e^{1,9x} + 125\,504e^{-1,9x}e^{1,9x}} = \dfrac{3e^{1,9x}}{e^{1,9x} + 125\,504}$.
2. F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$F'(x) = \dfrac{3}{1,9} \times \dfrac{1,9e^{1,9x}}{e^{1,9x} + 125\,504} = \dfrac{3e^{1,9x}}{e^{1,9x} + 125\,504} = f(x)$ d'après la question précédente.
F est donc une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** $V_m = \dfrac{1}{9-0}\displaystyle\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{9}[F(9)-F(0)] = \dfrac{1}{9}\left[\dfrac{3}{1,9}\ln\left(e^{1,9\times 9} + 125\,504\right) - \dfrac{3}{1,9}\ln\left(e^{1,9\times 0} + 125\,504\right)\right] =$
$\dfrac{1}{3\times 1,9}\left[\ln\left(e^{17,1} + 125\,504\right) - \ln(1 + 125\,504)\right] = \dfrac{1}{5,7}\left[\ln\left(e^{17,1} + 125\,504\right) - \ln 125\,505\right]$.
   b. $V_m \approx 0,94$.

C. Application de la partie A

1. On a $f(5) = \dfrac{3}{1 + 125\,504e^{-1,9\times 5}} / approx 290\,000$.
En 2005, 290 000 GPS environ ont été vendus.
2. On calcule $f(4) + f(5) + f(6) + f(7) \approx 4\,070\,000$ GPS vendus durant ces quatre années.
3. $f(7) \approx 247\,902$ et $f(8) \approx 290\,858$.
Les ventes de systèmes GPS dépasseront les 2 500 000 unités au cours de la l'année 2008.

Exercice 2 — 10 points

A. Loi binomiale

On note E l'évènement : « une facture prélevée au hasard dans la liasse de factures est erronée. »

1. Chaque prélèvement de 20 factures est constitué de 20 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise
Chaque épreuve élémentaire débouche sur deux résultats seulement : la facture est erronée, évènement de probabilité $p = 0,03$, ou facture non erronée, évènement de probabilité $1 - p = 1 - 0,03 = 0,97$.
La variable aléatoire X qui associe à ces tirages le nombre de fa ctures erronées suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n = 20\,;\; p = 0,03)$.
2. On a $p(X = 0) = C_{20}^{0} 0,03^{0} \times 0,97^{20} \approx 0,54$.
3. On calcule $p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \approx 0,98$.

B. Loi normale

1. On a $P(Y \leqslant 1\,500) \approx 0,95$.
2. On calcule $p(600 \leqslant Y \leqslant 1\,500) \approx 0,68$.

C. Probabilités conditionnelles

1. On trouve $p(M) = 0,65$; $p(C) = 0,35$; $p_M(D) = 0,02$; $p_C(D) = 0,01$.
2. **a.** $P(D \cap M) = 0,013$.
$P(D \cap C) = 0,003\,5$.
   b. Par somme de deux précédents résultats on obtient :
$P(D) = 0,016\,5$.
3. $p_v(D) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,003\,5}{0,016\,5} = \dfrac{35}{165} = \dfrac{7}{33} \approx 0,212\,121\,21 \approx 0,212\,1$.