

**Exercice 1 :**

**10 points**

**A. Loi binomiale**

- On prélève au hasard dans le stock, un véhicule, on a deux issues :
  - On appelle succès l'évènement : « le véhicule est défectueux ».  $p = P(E) = 0,2$ .
  - On appelle échec l'évènement : « le véhicule n'est pas défectueux ».  $q = 1 - p = 0,8$ .

On répète 20 fois l'expérience de manière indépendante (Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 véhicules).

La variable aléatoire  $X$  qui comptabilise le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = 0,2$ .

2.  $p(X = 1) = C_{20}^1 \times 0,2 \times 0,8^{19} = 0,06$   $p(X = 1) = 0,06$

3.  $p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = C_{20}^0 \times 0,2^0 \times 0,8^{20} + C_{20}^1 \times 0,2 \times 0,8^{19} = 0,07$   $p(X \leq 1) = 0,07$

4.  $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - 0,07$   $p(X \geq 2) = 0,93$

5.  $E(X) = n \times p = 20 \times 0,2 = 4$   $E(X) = 4$ .

Si on effectue un grand nombre de prélèvement de 20 véhicules, en moyenne 4 véhicules sur 20 seront défectueux.

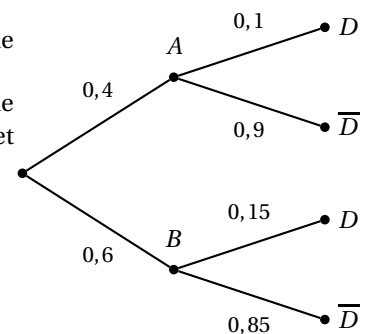
6.  $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \times 0,2 \times 0,8}$   $\sigma \approx 1,79$

7. D'après la question 5 sur 20 véhicules prélevés, 4 sont défectueux.  
 $4 \times 500 = 2\,000$

En moyenne lorsqu'on prélève 20 véhicules, il faut prévoir 2 0000 € de réparations

**C. Probabilités conditionnelles**

- On admet que pendant un mois donné, l'atelier a produit 40 % des véhicules et que le reste est produit par l'atelier  $b$ . donc  $p(A) = 0,4$  et donc  $p(B) = 0,6$
  - On admet que 10 % des véhicules provenant de l'atelier  $a$  sont défectueux et que 15 % des véhicules provenant de l'atelier  $b$  sont défectueux. donc  $p_A(D) = 0,1$  et  $p_B(D) = 0,15$



$p(A) = 0,4, p(B) = 0,6, p_A(D) = 0,1$  et  $p_B(D) = 0,15$

$P(D \cap A) = p(A) \times p_A(D) = 0,4 \times 0,1$   $P(D \cap A) = 0,04$

2. (a) et  $P(D \cap B) = p(B) \times p_B(D) = 0,6 \times 0,15$   $p(D \cap B) = 0,09$ .

$p(D \cap A) = 0,04$   $p(D \cap B) = 0,09$

(b)  $p(D) = p(D \cap A) + p(D \cap B) = 0,04 + 0,09$ . donc  $p(D) = 0,13$

$$3. p_D(A) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{0,04}{0,13} \quad p_D(A) = \frac{4}{13} = 0,31$$

**Exercice 2 :**

**10 points**

**A. Étude d'une fonction**

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 36 \ln x + 150.$$

1. (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \times 2x - 36 \frac{1}{x} \\ &= x \times \frac{x}{x} - \frac{x}{36} \\ &= \frac{x^2 - 36}{x} = \frac{x^2 - 6^2}{x} \\ &= \frac{(x-6)(x+6)}{x} \end{aligned}$$

Donc pour tout nombre réel  $x$  de  $[6; 30]$ ,

$$f'(x) = \frac{(x-6)(x+6)}{x}.$$

(b)

$x$	6	30
$x-6$	0	+
$x+6$		+
$x$		+
$f'(x)$	0	+

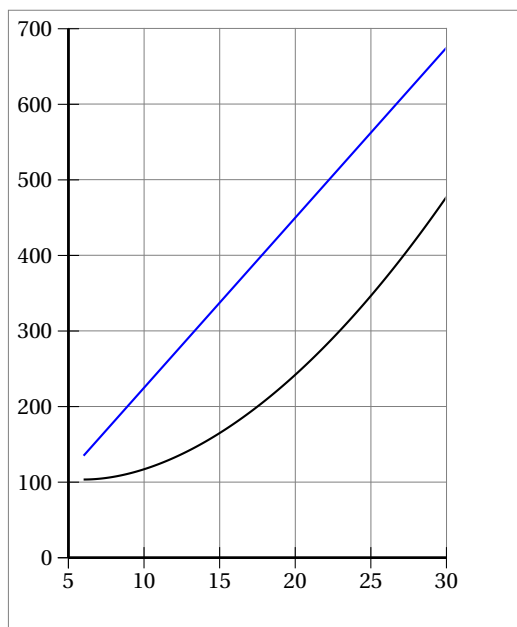
(c)

$x$	6	30
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	$168 - 36 \ln(6)$	$600 - 36 \ln(30)$

2. (a)

$x$	6	10	15	20	25	30
$f(x)$	104	117	165	242	347	478

(b)



**B. Calcul intégral**

1. (a) Soit  $H$  la fonction définie sur  $[6; 30]$  par  $H(x) = x \ln(x) - x$ .

$$H'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Donc  $H$  est une primitive sur  $[6; 30]$  de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \ln(x)$ .

(b)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 36\ln x + 150.$$

donc  $F(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - 36(x\ln(x) - x) + 150x$  donc  $F(x) = \frac{x^3}{6} + 186x - 36x\ln(x)$

2. (a)

$$\begin{aligned} I &= \int_6^{30} f(x) dx \\ &= F(30) - F(6) \\ &= \frac{30^3}{6} + 186 \times 30 - 36 \times 30\ln(30) - \left( \frac{6^3}{6} + 186 \times 6 - 36 \times 6\ln(6) \right) \\ &= 4\,500 + 5\,580 - 1080\ln(30) - 36 - 1\,116 + 216\ln(6) \\ &= 8\,928 - 1\,080\ln(30) + 216\ln(6) \end{aligned}$$

$$I = 8928 - 1080\ln(30) + 216\ln(6).$$

(b) On a  $V_m = \frac{1}{30-6} I$  donc  $V_m = 235,07$

### C. Application économique

On admet que le coût total de production pour  $x$  articles produits, avec  $6 \leq x \leq 30$ , est  $f(x)$  euros, où  $f$  est la fonction définie dans la partie A.

1.  $r(x) = 22,5 \times x$

2. si on vend 20 articles alors on a  $B(20) = 22,5 \times 20 - f(20)$  donc  $B(20) = 450 - \frac{400}{2} + 36\ln(20) - 150$  donc  $B(20) = 100 + 36\ln(20)$

Le bénéfice pour 20 articles fabriqués et vendus est de 207,85€

3. Graphiquement on regarde où l'écart entre la courbe et la droite est le plus important.

Il faut fabriquer et vendre 24 articles pour que le bénéfice soit maximal

