∽ Brevet de technicien supérieur session 2011 ∽
Métropole Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **10 points**

A. Probabilités conditionnelles

1. $p(F) = 0,7$ $p(G) = 0,3$ $p_F(D) = 0,05$ et $p_G(D) = 0,10$

2. **a.** $p(F \cap D) = p(F) \times p_F(D) = 0,7 \times 0,05$. $\boxed{p(F \cap D) = 0,035}$

   b. $p(G \cap D) = p(G) \times p_G(D) = 0,3 \times 0,1$. $\boxed{p(F \cap D) = 0,03}$

3. $p(D) = p(F \cap D) + p(G \cap D) = 0,035 + 0,03$. $\boxed{p(D) = 0,065}$

4. $p_D(G) = \dfrac{p(D \cap G)}{p(D)} = \dfrac{0,03}{0,065}$. $\boxed{p_D(G) = 0,4615 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

B. Loi binomiale

1. On prélève un pneu, il y a 2 issues
   - On appelle succès l'événement «le pneu est défectueux». $p = 0,065$
   - On appelle échec l'événement «le pneu n'est pas défectueux» $q = 1 - 0,065 = 0,935$

   On répète 10 fois l'expérience de manière aléatoire (tirage assimilé à un tirage avec remise)

   Donc la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,065$

2. $p(X = 0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0,065^0 \times 0,935^{10} = 0,935^{10}$ $\boxed{p(X = 0) = 0,5106 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

3.
$$\begin{aligned} p(X \geqslant 2) &= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \\ &= 0,935^{10} + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0,065^1 \times 0,935^9 + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} 0,065^2 \times 0,935^8 \\ &= 0,935^{10} + 10 \times 0,065 \times 0,935^9 + 45 \times 0,065^2 \times 0,935^8 \end{aligned}$$

$\boxed{p(X \geqslant 2) = 0,9767}$

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

1. $m = n \times p = 400 \times 0,2$. $\boxed{m = 80}$

   $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{400 \times 0,2 \times 0,8} = \sqrt{64}$ $\boxed{\sigma = 8}$

2.
$$\begin{aligned} p(Z \leqslant 92,5) &= p\left(\frac{Z - 80}{8} \leqslant \frac{92,5 - 80}{8}\right) \\ &= p\left(\frac{Z - 80}{8} \leqslant 1,5625\right) \\ &= 0,9406 + \frac{0,9418 - 0,9406}{4} \end{aligned}$$

car la variable aléatoire $\dfrac{Z - 80}{8}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$

$\boxed{p(Z \leqslant 92,5) = 0,9409}$

$$\begin{aligned}p(Z \geqslant 99,5) &= p\left(\frac{Z-80}{8} \geqslant \frac{99,5-80}{8}\right)\\ &= p\left(\frac{Z-80}{8} \geqslant 2,4375\right)\\ &= 1-p\left(\frac{Z-80}{8} < 2,4375\right) \quad \text{car la variable aléatoire } \frac{Z-80}{8} \text{ suit une loi } \mathcal{N}(0,1)\end{aligned}$$

3. $$= 1-(0,9925+\frac{3}{4}(0,9927-0,9925) \qquad \boxed{p(Z \geqslant 99,5) = 0,99265}$$

Exercice 2 **10 points**

A. Statistiques

1. À la calculatrice : $\boxed{r = -0,946}$

2. **a.** À la calculatrice on a $\boxed{y = -0,1805x+4,8707}$

   b. Voir le tracé sur l'annexe

x	0	12
$y=-0,1805x+4,8707$	4,8707	2,7047

B. Étude d'une fonction

1. **a.** $f(x) = 4,64-0,024x - \dfrac{1,4e^{2x}}{e^2x+160000}$. On pose $\begin{array}{c} u(x) = 1,4e^{2x} \\ v(x) = e^{2x}+160\,000\end{array}$ $\qquad \begin{array}{c} u'(x) = 1,4\times 2e^{2x} = 2,8e^{2x} \\ v'(x) = 2e^{2x}\end{array}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0-0,024-\frac{2,8e^{2x}\times(e^{2x}+160\,000)-1,4e^{2x}\times 2e^{2x}}{(e^{2x}+160\,000)^2}\\ &= -0,024-\frac{\cancel{2,8e^{2x}\times e^{2x}}+2,8e^{2x}\times 160000-\cancel{2,8e^{2x}\times e^{2x}}}{\left(e^{2x}+160000\right)^2}\\ &= -0,024-\frac{448000e^{2x}}{\left(e^{2x}+160000\right)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = -0,024-\frac{448000e^{2x}}{\left(e^{2x}+160000\right)^2}}$$

b. Comme une fonction exponentielle est toujours strictement positive on en déduit donc que pour tout $x \in [0,12]$ $448000e^{2x} > 0$ et que pour tout $x \in [0\,;\,12]$ $(e^{2x}+160000)^2 > 0$. Donc pour tout $x \in [0,12]$ $-\dfrac{448000e^{2x}}{(e^{2x}+160000)^2}$ est strictement négatif.

f' est donc la somme de deux nombres $(-0,24)$ et $-\dfrac{448000e^{2x}}{\left(e^{2x}+160000\right)^2}$ strictement négatif.

$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in [0\,;\,12],\ f'(x) < 0}$

x	0	12
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1,65 ↘	2,96

$f(0) = 4,65-\dfrac{1,4}{160001} \approx 4,65$; $f(12) = 4,362-\dfrac{1,4e^{24}}{160000+e^{24}} \approx 2,96$

2. **a.**

x	0	2	4	5	6	7	8	10	12
$f(x)$	4,65	4,60	4,53	4,36	3,8	3,25	3,08	3,01	2,96

b. Voir la courbe sur le graphique en annexe

3. La courbe $\mathscr{C}$ semble mieux ajuster le nuage de point que la droite $\mathscr{D}$ car elle passe au plus près de tous les points notamment sur l'intervalle $[4\,;\,9]$

C. Calcul intégral et intégration

1. $F(x) = 4,65x - 0,012x^2 - 0,7\ln(\text{e}^{2x} + 160\,000)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 4,65 - 0,012 \times 2x - 0,7\frac{2 \times \text{e}^{2x}}{\text{e}^{2x} + 160\,000} \\ &= 4,65 - 0,024x - \frac{1,4\text{e}^{2x}}{\text{e}^{2x} + 160\,000} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur l'intervalle } [0\,;\,12]}$

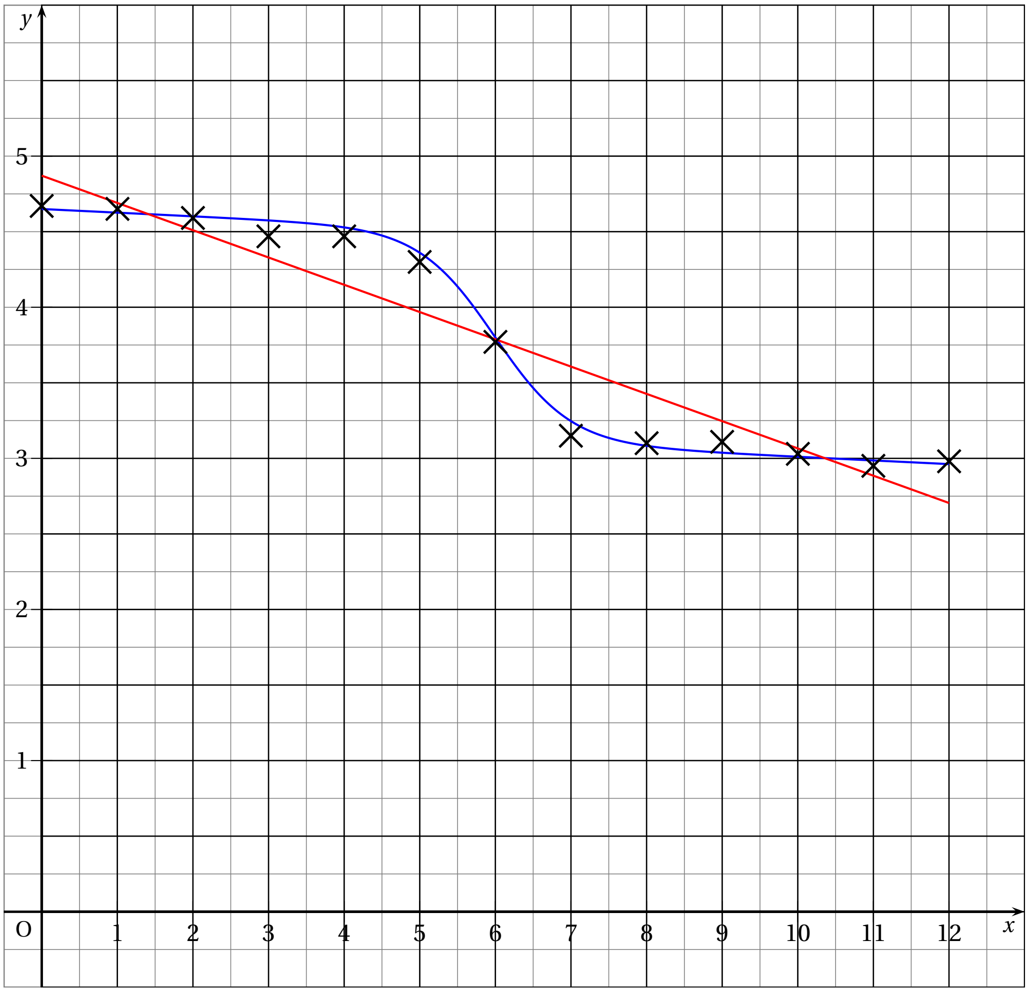
2. **a.**

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{1}{12-0}\int_0^{12} f(x)\,\text{d}x \\ &= \frac{1}{12}\left(F(12) - F(0)\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(4,65 \times 12 - 0,012 \times 12^2 - 0,7\ln\left(\text{e}^{2\times 12} + 160\,000\right) - \left(4,65 \times 0 - 0,012 \times 0^2 - 0,7\ln\left(\text{e}^{2\times 0} + 160\,000\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{\cancel{12}}4,65 \times \cancel{12} - \frac{1}{\cancel{12}} \times 0,012 \times 12^{\cancel{2}} - \frac{0,7}{12}\ln(\text{e}^{24} + 160\,000) + \frac{0,7}{12}\ln(1 + 160\,000) \\ &= 4,65 - 0,144 + \frac{0,7}{12}\left(\ln(1 + 160\,000) - \ln(\text{e}^{24} + 160\,000)\right) \\ &= 4,65 - 0,144 + \frac{0,7 \times 10}{12 \times 10}\left(\ln(1 + 160\,000) - \ln\left(\text{e}^{2\times 12} + 160\,000\right)\right) \\ &= 4,506 + \frac{7}{120}\ln\left(\frac{160\,001}{\text{e}^{24} + 160\,000}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{V_m = 4,506 + \frac{7}{120}\ln\left(\frac{160\,001}{\text{e}^{24} + 160\,000}\right)}$$

b. $\boxed{V_m = 3,8 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$

3. La consommation moyenne de tabac d'une personne âgée de plus de 15 ans entre 1997 et 2009 est de 3,8 g par jour


y
5
4
3
2
1
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
x